

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Р. Г. Дреботій

# **КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ПЛАТФОРМ AGROS ТА FENICS**

Навчальний посібник

Львів  
2025

УДК [004.94:004.42/.43:510.877]:53.02](075.8)

Д78

**Рецензенти:**

д-р фіз.-мат. наук, професор, академік НАН України **О. М. Хіміч**  
(Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України);

д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. сп. **Б. Д. Дробенко**  
(Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України);

канд. фіз.-мат. наук, доцент **В. В. Вербіцький**  
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)

*Рекомендовано до друку Вченою радою  
Львівського національного університету імені Івана Франка  
(протокол № 80/3 від 28 березня 2025 р.)*

Д78

**Дреботій Р. Г.**

Комп'ютерне моделювання фізичних процесів з використанням платформ Agros та FEniCS : навч. посібник / Р. Г. Дреботій. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2025. – 116 с.

ISBN 978-617-10-0920-2

Розглянуто використання сучасних програмних засобів, що реалізують метод скінченних елементів, для моделювання фізичних процесів у інженерії. Висвітлено математичні основи методу скінченних елементів, а також аспекти його програмної реалізації. Описано математичні моделі теплопровідності, дифузії-адвекції-реакції, акустики, гідродинаміки та теорії пружності.

Показано моделювання відповідних процесів з використанням існуючих інженерних пакетів, на прикладі середовища Agros. Також розглянуто використання програмної бібліотеки FEniCS як основи для побудови власних числових схем інтегрування рівнянь математичної фізики, чи алгоритмів, що базуються на апроксимаціях розв'язків таких рівнянь. Описано стаціонарні та нестаціонарні моделі.

Приділено увагу розв'язуванню задач оптимізації параметрів у розглянутих моделях. Подано короткий огляд підходів до вирішення оптимізаційних задач. Описано використання модуля Agros OptiLab.

Для студентів факультету прикладної математики та інформатики.

УДК [004.94:004.42/.43:510.877]:53.02](075.8)

ISBN 978-617-10-0920-2

© Дреботій Р. Г., 2025  
© ЛНУ ім. Івана Франка, 2025

# Зміст

|                                                                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Передмова</b> .....                                                                                                                                  | 5  |
| <b>Розділ 1. Метод скінченних елементів</b> .....                                                                                                       | 10 |
| 1.1. Похідна за напрямком. Градієнт функції.<br>Оператор Лапласа .....                                                                                  | 10 |
| 1.2. Кратні та криволінійні інтеграли. Формула Гаусса-<br>Остроградського .....                                                                         | 12 |
| 1.3. Задача дифузії-адвекції-реакції .....                                                                                                              | 18 |
| 1.4. Варіаційне рівняння .....                                                                                                                          | 20 |
| 1.5. Метод Гальоркіна .....                                                                                                                             | 23 |
| 1.6. Базисні функції методу скінченних елементів .....                                                                                                  | 24 |
| 1.7. Обчислення локальних компонент СЛАР .....                                                                                                          | 26 |
| 1.8. Процедура формування глобальної системи рівнянь .....                                                                                              | 30 |
| 1.9. Нестационарні задачі. Схеми інтегрування в часі .....                                                                                              | 31 |
| <b>Підсумки</b> .....                                                                                                                                   | 33 |
| <b>Питання для самоперевірки</b> .....                                                                                                                  | 34 |
| <b>Завдання-проекти</b> .....                                                                                                                           | 34 |
| <b>Розділ 2. Середовище Agros</b> .....                                                                                                                 | 35 |
| 2.1. Загальний огляд користувацького інтерфейсу .....                                                                                                   | 35 |
| 2.2. Задача теплопровідності. Робота з геометрією. Задання<br>крайових умов. Бібліотека матеріалів .....                                                | 36 |
| 2.3. Задача акустики. Рівняння Гельмгольца. Моделювання<br>розподілу акустичного тиску у приміщенні .....                                               | 51 |
| 2.4. Задача теорії пружності. Визначення деформацій<br>кронштейна під дією заданих навантажень .....                                                    | 54 |
| 2.5. Задача про рух рідини / газу. Рівняння Нав'є-Стокса.<br>Моделювання обтікання повітряним потоком дросельної<br>заслінки у камері карбюратора ..... | 58 |

|                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Підсумки</b> .....                                                                                                | 63  |
| <b>Питання для самоперевірки</b> .....                                                                               | 64  |
| <b>Завдання-проекти</b> .....                                                                                        | 64  |
| <b>Розділ 3. Бібліотека FEniCS</b> .....                                                                             | 66  |
| 3.1. Встановлення бібліотеки .....                                                                                   | 66  |
| 3.2. Задача дифузії-адвекції-реакції: опис рівняння, геометрії та крайових умов. Задання простору апроксимацій ..... | 67  |
| 3.3. Стаціонарна задача лінійної теорії пружності. Варіаційне формулювання. Моделювання згину балки .....            | 73  |
| 3.4. Візуалізація результатів. Використання ParaView .....                                                           | 77  |
| 3.5. Нестационарні рівняння Нав'є-Стокса. Проекційний метод Чоріна .....                                             | 79  |
| 3.6. Обтікання циліндра. Доріжка Кармана .....                                                                       | 81  |
| 3.7. Лінеаризація стаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса методом Пікара .....                                             | 89  |
| <b>Підсумки</b> .....                                                                                                | 90  |
| <b>Питання для самоперевірки</b> .....                                                                               | 90  |
| <b>Завдання-проекти</b> .....                                                                                        | 91  |
| <b>Розділ 4. Задачі оптимізації</b> .....                                                                            | 92  |
| 4.1. Поняття про методи оптимізації. Градієнтні методи. Генетичні алгоритми .....                                    | 93  |
| 4.2. Модуль Agros OptiLab. Задача оптимального вибору геометричних параметрів області .....                          | 95  |
| 4.3. Задача оптимального розміщення підприємства .....                                                               | 100 |
| 4.4. Зв'язані задачі. Дослідження меж вигину біметалевої пластини .....                                              | 103 |
| <b>Підсумки</b> .....                                                                                                | 112 |
| <b>Питання для самоперевірки</b> .....                                                                               | 112 |
| <b>Завдання-проекти</b> .....                                                                                        | 113 |
| <b>Список рекомендованої літератури</b> .....                                                                        | 114 |
| <b>Предметний покажчик</b> .....                                                                                     | 115 |

# Передмова

У багатьох інженерних задачах при проєктуванні різноманітних пристроїв і конструкцій виникає проблема моделювання фізичних полів. Прикладів таких безліч. Наведемо лише деякі із них:

- У будівництві потрібно визначати межі міцності будинків та конструкцій і їхню реакцію на зовнішні чинники, зокрема землетруси. На основі проведених обчислень оптимізують геометрію каркасу будинку, товщину стін тощо [4, 6, 9, 14].
- У машинобудуванні потрібно розраховувати внутрішні напруження і деформації різних робочих деталей механізмів і машин [4, 6, 9, 14]. Знаючи розподіл напружень та гранично допустимі значення цих напружень для розглядуваного матеріалу, можна оцінити можливість руйнування деталі в процесі експлуатації. Окрім того, знаючи зони деталі, де експлуатаційні напруження перевищують допустимі, можна провести оптимізацію геометрії деталі так, щоб результативна деталь задовольняла потрібні вимоги до міцності.
- В аерокосмічній галузі широко використовують моделювання повітряних потоків, а саме – обтікання ними літальних апаратів [7]. Таке моделювання дає змогу визначити розподіл сил тиску, що діють на аеродинамічні поверхні літального апарата, оцінити підймальну силу, знайти аеродинамічний фокус і т. д., а також здійснити якісний аналіз характеру обтікання. Зокрема: визначити елементи фюзеляжу, що провокують завихрення потоку; оцінити температури елементів фюзеляжу при надзвукових швидкостях обтікання тощо. На основі такого моделювання зазвичай проводять певні оптимізації конструкції літального апарата.
- При проєктуванні концертних залів потрібно моделювати поширення звуку у залі й вибирати оптимальне розміщення джерел звуку, а також оцінювати вплив матеріалів стін на характер відбиття звукових хвиль [13].

- При проектуванні електричних машин поряд із механічними та температурними полями розглядають розподіл електромагнітного поля, оптимізацію геометрії статорів та роторів таких машин, зокрема розміщення і конфігурацію обмоток. Такі розрахунки дають змогу оцінити теплові втрати на струми Фуко у магнітопроводах і оптимізувати, відповідно, крутний момент машини та підвищити її ККД [5, 8, 10].
- В екології важливим є моделювання поширення забруднень у атмосфері чи в океані. Модель дифузії-адвекції дає змогу знаходити концентрації домішок на певній території та робити висновки про їхній вплив на біосферу [4, 6, 12].

У всіх наведених прикладах використання математичного моделювання значно пришвидшує і спрощує роботу інженера, оскільки більшість експериментів проводять не з реальною фізичною моделлю процесу у лабораторії, а з використанням комп'ютера. Це, зокрема, дає змогу дуже швидко змінювати геометрію проєктованих деталей чи конструкцій і проводити експеримент повторно. Отже, ми отримуємо суттєве скорочення часу розробки та, відповідно, матеріальних ресурсів.

Варто зазначити, що в усіх наведених прикладах ми можемо побудувати точну математичну модель розглядуваних явищ. Такі моделі математичної фізики формують зазвичай як крайові задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних. Попри можливість їхнього якісного дослідження щодо розв'язності та стійкості, знаходження точного розв'язку таких задач у аналітичній формі є або неможливим, або ж отримані у такий спосіб розв'язки малопридатні для числових обчислень, які якраз і важливі для інженера.

Отож у більшості випадків шукають апроксимації розв'язків розглядуваних задач з використанням числових методів та комп'ютерної техніки. Є низка відносно універсальних методів для наближеного розв'язування задач математичної фізики. Такими є, зокрема: метод скінченних різниць; метод скінченних елементів; метод граничних елементів; метод граничних інтегральних рівнянь; метод колокації; метод скінченних об'ємів.

Метод скінченних елементів посідає провідне місце у цій плеяді. Таке становище зумовлене значною часткою задач механіки в інженерії, з яких і зародився цей метод. У цих задачах є дві важливі особливості: 1) розглядуваний об'єкт є обмеженим у просторі; 2) геометрія модельованого об'єкта є складною. Саме можливість ефективного застосування до задач зі складною геометрією і зробили метод скінченних елементів основним

методом, який зазвичай реалізують у пакетах інженерного програмного забезпечення. Зазначимо, що часто цей метод комбінують з іншими методами.

Цей посібник написано для вибіркової дисципліни «Обчислювальні платформи FEniCS та Agros2D», яку автор читає для студентів 4-го курсу бакалаврату спеціальності «Комп'ютерні науки» на факультеті прикладної математики та інформатики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Згадана дисципліна певною мірою є логічним продовженням дисципліни «Методи комп'ютерних обчислень» («Чисельні методи математичної фізики»), у межах якої студентам систематично викладають теорію методу скінченних елементів, зокрема такі питання, як: коректність варіаційних формулювань, простори Соболева, оцінки похибок, швидкість збіжності, схеми дискретизації нестационарних задач із рівняннями параболічного та гіперболічного типу і т. д. Для закріплення матеріалу лекцій студенти на прикладі *лише* одновимірних задач власноруч реалізують метод скінченних елементів та деякі схеми інтегрування у часі нестационарних задач.

Мета ж нашого посібника (і відповідного курсу) – ознайомити студента із деякими сучасними програмними засобами, що реалізують метод скінченних елементів *для двовимірних задач* із акцентом на *практично-інженерну* та *алгоритмічну* складові. Оскільки використання та розуміння розглянутих засобів вимагає від користувача певних знань самого методу скінченних елементів, то студенту, поряд із застосуванням матеріалів насиченого теорією курсу «Методи комп'ютерних обчислень», також знадобляться знання алгоритмічної реалізації методу скінченних елементів саме у *багатовимірному* випадку. Ці аспекти висвітлено у першому розділі посібника, мета якого – провести читача технічними кроками реалізації методу скінченних елементів для двовимірних задач: від формулювання задачі до обчислення компонент системи лінійних алгебричних рівнянь. Для повноти викладу подано також деякі базові відомості з багатовимірного аналізу, що потрібні для формулювання двовимірних модельних задач і самого методу скінченних елементів у цьому випадку.

У посібнику описано використання двох типів прикладного програмного забезпечення. Перший можна вважати суто «інженерним» програмним забезпеченням. Використання програм такого типу показано на прикладі обчислювальної платформи Agros (в минулому Agros2D). Приклади інших програм – це Ansys, Comsol Multiphysics. Наголосимо, що всі вони мають дуже подібний інтерфейс користувача, тому розгляд однієї із

таких платформ дає добре уявлення про те, як користуватися такими інженерними платформами загалом. Особливістю вищезгаданого програмного забезпечення якраз і є наявність добре розвинутого та зручного візуального інтерфейсу користувача, що дає змогу майже повністю абстрагуватися від знання самих методів моделювання і концентруватися власне на інженерній складовій вирішуваної задачі. Зазначимо, що інженерні системи такого типу реалізують завжди фіксований набір моделей (зазвичай доволі широкий).

Другий тип програмних засобів, які ми розглядатимемо – це програмні бібліотеки, які реалізують метод скінченних елементів. Як приклад наведено використання на мові Python бібліотеки FEniCS. На відміну від програмних засобів першого типу, тут ми маємо лише певний набір компонент, які дають змогу автоматизувати всі основні частини алгоритму методу скінченних елементів. Проте коректне задання самої задачі математичної фізики, всіх потрібних просторів апроксимацій, способу розв'язування системи лінійних рівнянь тощо залишається за користувачем, як і візуалізація результатів чи побудова геометрії. Зазвичай такі бібліотеки автоматизують усі рутинні частини алгоритму методу скінченних елементів, зокрема прив'язку крайових умов до вузлів сітки, генерування системи рівнянь на кожному скінченному елементі та формування глобальної системи рівнянь. Попри те, що користувачеві залишається визначити лише деякі ключові аспекти алгоритму, для цього все ж потрібно знати і розуміти метод скінченних елементів. Зокрема, потрібно вміти записувати варіаційне формулювання розглядуваних крайових задач та коректно обирати простори апроксимацій. Оскільки метод скінченних елементів фактично придатний лише для розв'язування еліптичних крайових задач, то користувач для розв'язування нестационарних (параболічних і гіперболічних) задач додатково повинен самостійно імплементувати схему інтегрування задачі у часі. Також варто згадати про нелінійні задачі. При тому, що FEniCS має підтримку розв'язування останніх, усе ж деякі задачі вимагають специфічних способів лінеаризації. У таких випадках дослідник повинен власноруч програмувати відповідні числові схеми для зведення нелінійної задачі до лінійного вигляду (зазвичай до послідовності лінійних задач). Також зауважимо, що деякі задачі вимагають адаптування сітки скінченних елементів, що необхідно часто реалізовувати самостійно, оскільки FEniCS підтримує адаптивність лише з певним типом оцінювачів похибок. Якщо абстрагуватися від усіх описаних моментів, то можна впевнено

стверджувати, що використання таких бібліотек дає дуже велику гнучкість у побудові власне нових алгоритмів на основі базових конструкцій методу скінченних елементів. Тому бібліотеки на кшталт FEniCS насамперед дуже корисні для спеціалістів з обчислювальної математики, які працюють над поліпшенням існуючих і розробкою нових числових алгоритмів: вони дають змогу не витрачати багато часу на роботу, пов'язану із реалізацією процедур самого методу скінченних елементів, що є достатньо рутинними та універсальними незалежно від задачі, до якої метод застосовують.

На завершення розглянемо підходи до автоматизації вирішення оптимізаційних задач, про які згадано вище при описі різних моделей. Розглянемо коротко ідею градієнтних методів та генетичних алгоритмів. Як приклад наведено використання модуля Agros OptiLab. Також показано деякий нестандартний підхід до розв'язування задач оптимального розміщення підприємств для мінімізації їхнього впливу на довкілля.

## ***Підсумки***

У цьому розділі наведено короткі відомості про теорію оптимізації та розглянуто використання Agros для вирішення задачі оптимального вибору геометрії області визначення задачі теплопровідності. На цьому прикладі розглянуто загальну схему визначення задачі оптимізації та її розв'язування. Попри те, що продемонстрований приклад доволі простий, загальна схема розв'язування завжди одна і та ж сама.

Розглянуто також один нестандартний підхід до розв'язування задачі оптимального розміщення підприємства, що базується на використанні додаткових (спряжених) задач дифузії-адвекції-реакції. Такий підхід дає змогу суттєво знизити потрібну кількість проміжних задач, які потрібно розв'язати з використанням методу скінченних елементів. Розглянувши цей підхід, показано: попри загальність реалізованих підходів у Agros OptiLab, для деяких конкретних задач можуть існувати ефективніші алгоритми.

На завершення розглянуто використання модуля Agros OptiLab для задач із кількома параметрами на прикладі розв'язування системи зв'язаних задач та дослідження оптимальних конфігурацій геометрії. Показано, як будувати такі моделі на прикладі задачі про вигин біметалевої пластини під дією тепла, що генерується в області за проходження електричного струму.

## ***Питання для самоперевірки***

1. Що таке градієнтний метод?
2. Якою є загальна схема генетичних алгоритмів?
3. Як у Agros OptiLab задати цільову функцію?
4. Що визначає закон Джоуля-Ленца?
5. Як виводять рівняння Ламе з рівняння (3.1)?
6. Яким є зв'язок між розподілом потенціалу і густиною струму в області?
7. Як можна вивести рівняння, що задає розподіл електричного потенціалу у провіднику?
8. Чому при затопленні кораблів із паровими силовими установками є великий ризик вибуху котлів? Дослідіть напруження, що виникають у стінках парового котла, всередині якого кипить вода, а його

зовнішня частина контактує із холодним середовищем. Висновки обґрунтуйте.

### ***Завдання-проекти***

1. На основі задачі акустики, яку розглянуто у розділі 2, знайти таке розташування динаміків у кімнаті, за якого звуковий тиск у сусідній кімнаті буде найменшим.
2. Реалізувати алгоритм з підрозділу 4.3 з використанням FEniCS.
3. Реалізувати задачу про вигин біметалевої пластини у FEniCS.
4. Розв'язати задачу оптимального розміщення підприємства з використанням Agros OptiLab.

# Список рекомендованої літератури

1. Заболоцький М. В. Математичний аналіз : підручник / Заболоцький М. В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І. – Київ : Знання, 2008. – 421 с.
2. Офіційна сторінка середовища Agros. URL: <https://www.agros2d.org> (дата звернення: 11.01.2025)
3. Офіційна сторінка бібліотеки FEniCS. URL: <https://fenicsproject.org> (дата звернення: 11.01.2025)
4. Трушевський В. М. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі. Теоретичні аспекти і застосування / Трушевський В. М., Шинкаренко Г. А., Щербина Н. М. – Львів : Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – 396 с.
5. Aliprantis D. Electric Machines. Theory and Analysis Using the Finite Element Method / Aliprantis D., Wasynczuk O. – Cambridge : Cambridge University Press, ISBN: 9781108423748, 2022. – 514 p.
6. Brenner S. C. The mathematical theory of finite element methods / Brenner S. C., Scott L. R. – New York : Springer, 2008.
7. Chalot F. Extension of methods based on the stabilized finite element formulation for the solution of the Navier–Stokes equations and application to aerodynamic design / Chalot F., Johan Z., Mallet M., Billard F., Martin L., Barré S. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. B. – 2023. – Vol. 417.
8. Chiver O. Induction Motor Analysis by Finite Elements Method / Chiver O., Barz C., Neamt L., Erdei Z. // Journal of Electrical and Electronics Engineering. – 2010. – Vol. 3.
9. Hartmann F. Structural Analysis with Finite Elements / Hartmann F., Katz C. – Heidelberg : Springer Berlin. – 2007. – 598 p.
10. Kuczmam M. Analysis of an Induction Machine by the Finite Element Method / Kuczmam M., Gadó K., Marcsa D., Horváth S., Vajda I., Belahcen A. // Recent Innovations in Mechatronics. – 2018. – Vol. 5, No. 1.
11. Langtangen H. P. Solving PDEs in Python: The FEniCS Tutorial I / Langtangen H. P., Logg A. – Cham : Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-52462-7. – 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-52462-7>. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>)
12. Marchuk G. I. Mathematical Models in Environmental Problems / Marchuk G. I. – Amsterdam : North Holland. – 2012. ISBN 978-0444558244.
13. Prinn A. G. A Review of Finite Element Methods for Room Acoustics / Prinn A. G. // Acoustics. – 2023. – Vol. 5. – P. 367–395. <https://doi.org/10.3390/acoustics5020022>.
14. Werkle H. Finite Elements in Structural Analysis. Theoretical Concepts and Modeling Procedures in Statics and Dynamics of Structures / Werkle H. – Cham : Springer Cham, 2021. – 709 p.

# Предметний покажчик

## Г

градієнт функції 11

## Д

дивергенція 11

диференційовна функція 11

доріжка Кармана 81

## З

задача

акустики 51

дифузії-адвекції-реакції 18, 67

про рух рідини 58, 79

спряжена 102

теорії пружності 54, 73

теплопровідності 36

## І

інтеграл

криволінійний 13

подвійний 13

інтегрування в часі 31

## М

метод

Гальоркіна 23

Пікара 90

скінченних елементів 10, 24

Чоріна 79

## О

оператор Лапласа 12

## П

похідна

за напрямком 11

часткова 10

## Р

рівняння

варіаційне 20

Гельмгольца 51

Нав'є-Стокса 58, 79, 81

## С

слабкий розв'язок 22

## Ф

формула

Гаусса-Остроградського 17

заміни змінної 17

інтегрування частинами 16, 17, 21

Навчальне видання

**ДРЕБОТІЙ Роман Григорович**

# **КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ПЛАТФОРМ AGROS TA FENICS**

Навчальний посібник

Редактор *Ірина Лоїк*  
Комп'ютерне верстання *Вікторії Лоїк*  
Обкладинка *Романа Дреботія та Маргарити Білобринь*

---

Формат 70x100/16.

Умовн. друк. арк. 9,4. Тираж 200 прим.

Видавець та виготовлювач:

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
*вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000.*

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції.

Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.