

Міністерство освіти і науки України

Львівський національний університет імені Івана Франка

Х. П. Гнатенко, М. І. Самар, В. М. Ткачук

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА У КВАНТОВАНОМУ ПРОСТОРИ

Монографія

Львів

2024

УДК 530.145

Г 56

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. М. Гаврилик**
(Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова
НАН України);

д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Ткач**
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

*Рекомендовано до друку Вченою радою Львівського національного
університету імені Івана Франка
(протокол №59/11 від 29.11.2023)*

In the monograph a quantized space realized by deformed algebras of various types is considered. The effect of non-commutativity on the motion of a particle in a gravitational field is analyzed. Problems in noncommutative space are also highlighted, among them: the problem of violation of the equivalence principle, the problem of violation of spherical symmetry, the problem of describing a system of many particles, and the violation of the properties of kinetic energy. Ways to solve the above-mentioned problems are being studied. The results presented in the monograph are important for further studies of the features of space on Planck scales.

The monograph is meant for students, post-graduates of physics and mathematics, teachers and researchers.

Гнатенко Х. П.

Г 56 Задача Кеплера у квантованому просторі : монографія /
[Х. П. Гнатенко., М. І. Самар, В. М. Ткачук]. — Львів : ЛНУ імені
Івана Франка, 2024. — 136 с.
ISBN 978-617-10-0887-8.

Розглянуто квантований простір, реалізований за допомогою деформованих алгебр різних типів. Проаналізовано вплив некомутативності на рух частинки в гравітаційному полі. Знайдено оцінки для величини кванта простору на основі розв'язків задачі Кеплера. Також розглянуто проблеми у некомутативному просторі, серед них: проблема порушення принципу еквівалентності, порушення сферичної симетрії, опису системи багатьох частинок. Вивчено шляхи для вирішення вищезазначених задач. Наведені у монографії результати є важливими для подальших досліджень особливостей простору на планківських масштабах.

Для студентів, аспірантів фізико-математичних спеціальностей, викладачів і науковців.

УДК 530.145

© Гнатенко Х. П., Самар М. І., Ткачук В. М., 2024

© Львівський національний університет
імені Івана Франка, 2024
ISBN 978-617-10-0887-8

Зміст

Передмова	5
Розділ 1. Опис квантованості простору за допомогою деформованих алгебр	11
1.1 Алгебра з некомутативністю координат і некомутативністю імпульсів канонічного типу та мінімальна довжина	11
1.2 Алгебри з некомутативністю типу Лі	25
1.3 Алгебри з нелінійною деформацією	27
1.4 Лоренц-коваріантна деформована алгебра	30
Розділ 2. Задача Кеплера в просторі з деформованими дужками Пуассона з мінімальною довжиною	35
2.1 Система частинок у нерелятивістському деформованому просторі з узагальненим співвідношенням невизначеностей Гайзенберга	35
2.2 Оцінка мінімальної довжини на основі досліджень зміщення перигелію Меркурію	39
2.3 Лоренц-коваріантна гамільтонова механіка	43
2.4 Лоренц-коваріантна гамільтонова механіка з деформованими дужками Пуассона	44
2.5 Релятивістська частинка в кулонівському потенціалі з деформованими дужками Пуассона	45
2.6 Задача Кеплера в загальній теорії відносності	49
2.7 Задача Кеплера з деформованими дужками Пуассона	51
2.8 Оцінка мінімальної довжини, принцип еквівалентності та залежна від маси мінімальна довжина	52

Розділ 3. Рух макроскопічного тіла у некомутативному фазовому просторі та задача Кеплера	55
3.1 Проблема кінематичних змінних і параметри некомутативності	55
3.2 Система вільних частинок у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі	60
3.3 Імпульс центра мас як інтеграл руху у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі	70
3.4 Проблема опису руху багаточастинкової системи у шестивимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу	73
3.5 Вільне падіння тіла в однорідному гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі	78
3.6 Оцінка мінімального імпульсу на основі досліджень зсуву перигелію Меркурію	82
3.7 Вплив некомутативності координат і некомутативності імпульсів на рух системи Сонце-Земля-Місяць та слабкий принцип еквівалентності	86
Розділ 4. Зміщення перигелію у квантованому просторі зі збереженими симетрією відносно інверсії часу та сферичною симетрією . . .	95
4.1 Симетрія відносно інверсії часу у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу	95
4.2 Рух по колу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу	98
4.3 Некомутативна алгебра канонічного типу зі збереженою симетрією відносно інверсії часу та сферичною симетрією	101
4.4 Вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на зміщення перигелію	106
4.5 Оцінка верхніх меж для параметрів некомутативності	112
Розділ 5. Висновки	115
Список використаних джерел	119

Передмова

Різні деформовані алгебри було запропоновано для опису квантованого простору (простору з мінімальною довжиною). Ці алгебри можуть бути поділені на три типи, а саме: некомутативні алгебри канонічного типу (комутатори координат та комутатори імпульсів дорівнюють константам), некомутативні алгебри типу Лі (комутатори координат та імпульсів дорівнюють лінійним функціям координат та імпульсів) та нелінійні деформовані алгебри (комутатори координат та імпульсів дорівнюють нелінійним функціям координат та імпульсів).

Дослідження деформованих комутаційних співвідношень з мінімальною довжиною та їх класичних границь ($\hbar \rightarrow 0$) набуло в останній час значної популярності. Перші кроки в цьому напрямі зробив Снайдер, який розглядав цю ідею як спосіб регуляризації розбіжностей у квантовій теорії поля [1–3]. Алгебра Снайдера характеризується такими співвідношеннями:

$$[X_\mu, X_\mu] = i\hbar\beta J_{\mu\nu}, \quad (1)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\eta_{\mu\nu} + \beta P_\mu P_\nu), \quad (2)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (3)$$

де $J_{\mu\nu}$ – генератори Лоренца; β – константа ($\beta > 0$); $\nu, \mu = (0, 1, 2, 3)$; $\eta_{\mu\nu}$ – метричний тензор $[\eta_{\mu\nu}] = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. У нерелятивістському випадку алгебра Снайдера має такий вигляд:

$$[X_i, X_j] = i\hbar\beta(P_j X_i - P_i X_j), \quad (4)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \beta P_i P_j), \quad (5)$$

$$[P_i, P_j] = 0. \quad (6)$$

Тут $i, j = (1, 2, 3)$ (див., наприклад, [4–8]).

За останні десятиліття зацікавленість у гіпотезі мінімальної довжини відродилася завдяки дослідженням у теорії струн і кван-

товій гравітації [9–11]. Вони привели до висновку про узагальнений принцип невизначеності, який виглядає так:

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{\Delta P} + \beta \Delta P \right). \quad (7)$$

Тут вводиться фундаментальна мінімальна довжина $\Delta X_{min} = \hbar\sqrt{\beta}$. Припускається, що мінімальна довжина та довжина Планка $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.6 \cdot 10^{-35}$ м є величинами одного порядку.

Кемпф та інші дослідники зробили висновок, що мінімальна довжина може бути досягнута в квантовій механіці шляхом модифікації звичайних канонічних комутаційних відношень [12–15]. Для одновимірного простору деформовані комутаційні співвідношення мають вигляд:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta\hat{P}^2). \quad (8)$$

У випадку більш високих розмірностей простору, такі деформації можна узагальнити за допомогою таких співвідношень:

$$\begin{aligned} [\hat{X}_i, \hat{P}_j] &= i\hbar[(1 + \beta\hat{P}^2)\delta_{ij} + \beta'\hat{P}_i\hat{P}_j], \\ [\hat{X}_i, \hat{X}_j] &= i\hbar \frac{2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta\hat{P}^2}{1 + \beta\hat{P}^2} (\hat{P}_i\hat{X}_j - \hat{P}_j\hat{X}_i), \\ [\hat{P}_i, \hat{P}_j] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут β та β' – два невід’ємні параметри.

Варто зазначити, що деформовані комутаційні співвідношення, запропоновані Кемпфом, не є лоренц-коваріантними. Лоренц-коваріантна версія таких співвідношень була запропонована у праці [16] і може розглядатися як узагальнення алгебри, запропонованої Снайдером.

Гіпотезу мінімальної довжини було застосовано до різних проблем квантової механіки, таких як гармонічний осцилятор [13, 17–20], осцилятор Дірака [16, 21], атом водню [22–26], гравітаційна квантова яма [27, 28], частинка в дельта-потенціалі [29, 30], одновимірна задача кулонівського типу [29, 31, 32], частинка в потенціалі $1/X^2$ [33, 34], ефект Казимира [35], розсіювання частинок [36] та ін.

Вплив квантування простору вивчено на класичному рівні для таких проблем: кеплерівські орбіти, статистична фізика, складені

системи та інші [37–43]. Є також кілька досліджень, що розглядають класичні системи з лоренц-коваріантними типами деформацій. Наприклад, в [44] була досліджена класична система взаємодіючих релятивістських частинок у некомутативному просторі Снайдера. Також в [45] розглянуто питання порушення принципу еквівалентності, що спричинене некомутативним простором-часом.

Багато фізичних проблем вивчали у просторі з канонічною некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів (квантованому фазовому просторі канонічного типу), серед них: вільна частинка [46], система вільних частинок [47], атом водню [46, 48–50], гармонічний осцилятор [46, 51–58], нейтрони в гравітаційній квантовій ямі [59, 60], гравітаційні хвилі [61], задача Ландау [58], задачі квантової інформації [62, 63] та ін. Такі дослідження необхідні для з'ясування впливу некомутативності координат та некомутативності імпульсів на властивості фізичних систем, для оцінки мінімальної довжини, мінімального імпульсу.

Деформована алгебра Гайзенберга дає змогу феноменологічно описати квантований простір. Але водночас це зумовлює фундаментальні проблеми, серед яких проблема порушення слабого принципу еквівалентності [64].

Слабкий принцип еквівалентності стверджує, що траєкторія руху частинки в гравітаційному полі залежить лише від її початкового положення та швидкості, і не залежить від маси, складу та структури частинки. Цей принцип також відомий як універсальність вільного падіння або принцип еквівалентності Галілея і може розглядатися як підтвердження еквівалентності інерційної та гравітаційної мас. Принцип еквівалентності перевірили з точністю до 10^{-14} за допомогою супутника MICROSCOPE [65].

Як зазначено в [64], у межах деформованої алгебри з мінімальною довжиною порушується принцип слабкої еквівалентності. Ця проблема виникає через припущення про однаковість параметра деформації для елементарних частинок і макроскопічних тіл. Однак у працях [43, 64] було введено зв'язок між параметром деформації та масою $\beta = \gamma/m^2$, де γ – фундаментальна константа для всіх частинок. Ця ідея відновлює принцип еквівалентності в деформованому просторі з мінімальною довжиною та веде до отримання інших важливих результатів, таких як збереження адитивності кінетичної енергії системи частинок і незалежність кінетичної енергії від складу системи. Також це співвідношення відновлює незалежність перетворення Галілея та Лоренца у деформованому просторі [42].

У просторі з некомутативністю координат принцип еквівален-

тності досліджували у [66, 67]. У [67] знайдено, що слабкий принцип еквівалентності відновлюється у двовимірному просторі з некомутативністю координат у випадку, коли параметри координатної некомутативності обернено пропорційні до маси. У просторі з некомутативністю координат і некомутативністю імпульсів проблему порушення принципу еквівалентності вивчали у [60, 68]. Автори [68] дійшли висновку, що порушення принципу еквівалентності зумовлює анізотропія параметрів некомутативності.

Незважаючи на велику кількість досліджень гіпотези мінімальної довжини, перевірка гіпотези все ще потрібна. Одним з важливих аспектів, пов'язаних з гіпотезою мінімальної довжини, є розробка методів для її експериментальної перевірки. Стаття [69] містить аналіз верхніх меж мінімальної довжини, отриманих з вивчення властивостей різних систем. Проте головна мета полягає не лише в оцінці верхньої межі мінімальної довжини, а у підтвердженні чи спростуванні гіпотези про її існування шляхом порівняння з експериментальними даними. Це потребує достовірної теоретичної моделі та точних вимірів. Особливо важливо дослідити вплив мінімальної довжини на системи з потенціальною енергією в якій наявна сингулярність, оскільки очікується, що такі системи будуть особливо чутливими до ефектів квантованості простору. З цього погляду, задача Кеплера становить особливий інтерес.

Важливим є розв'язання проблеми опису руху макроскопічних систем у некомутативному фазовому просторі, визначення особливостей опису руху центра мас багаточастинкової системи з врахуванням некомутативності координат і некомутативності імпульсів частинок, які входять до її складу. У просторі з канонічною некомутативністю координат задачу багатьох частинок досліджували у [70]. Автори [71] вивчали систему двох заряджених частинок у некомутативному просторі (просторі з некомутативністю координат). Також систему двох частинок розглядали у просторі з некомутативністю координат і некомутативністю імпульсів [46]. Особливості опису руху системи багатьох частинок у двовимірному просторі з некомутативністю координат канонічного типу описано у [67].

Звичні комутаційні співвідношення для операторів координат та операторів імпульсів $[x_i, x_j] = 0$, $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, $[p_i, p_j] = 0$ є інваріантними відносно інверсії часу [72]. Врахувавши те, що у квантовій механіці перетворення інверсії часу включають комплексне спряження (див., наприклад, [72]) та при інверсії часу координати та імпульси перетворюються як $x_i \rightarrow x_i$, $p_i \rightarrow -p_i$, отримаємо, що при перетворенні інверсії часу комутаційні співвідношення для операторів координат та операторів імпульсів за-

лишаються незмінними. Припущення про те, що комутатори для координат та для імпульсів дорівнюють константам, зумовлює порушення симетрії відносно інверсії часу [57, 73]. Некомутативна алгебра канонічного типу не є інваріантною відносно інверсії часу. Розглядаючи перетворення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів при інверсії часу, аналогічні як у звичному просторі $X_i \rightarrow X_i$, $P_i \rightarrow -P_i$, отримуємо, що співвідношення, наприклад, двовимірної некомутативної алгебри

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \quad (10)$$

$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar(1 + \sigma), \quad (11)$$

$$[P_1, P_2] = i\hbar\eta \quad (12)$$

переходять у такі рівності:

$$[X_1, X_2] = -i\hbar\theta, \quad (13)$$

$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar(1 + \sigma), \quad (14)$$

$$[P_1, P_2] = -i\hbar\eta. \quad (15)$$

Отже, із (13)-(15) випливає, що при інверсії часу алгебра (10)-(12) трансформується у некомутативну алгебру з параметрами некомутативності $-\theta$, $-\eta$.

Проблема порушення симетрії відносно інверсії часу у некомутативному просторі канонічного типу мало досліджена. У [73] звернено увагу на існування цієї проблеми у просторі з некомутативністю координат. Автори праці [73] з'ясували, що гамільтоніан гармонічного осцилятора у некомутативному просторі не є інваріантним відносно інверсії часу. У [57] досліджено гармонічний осцилятор у магнітному полі у просторі з некомутативністю координат та з'ясовано, що за певного вибору параметра координатної некомутативності (при певній залежності цього параметра від маси, частоти осцилятора, а також від величини магнітного поля) симетрія відносно інверсії часу відновлюється.

Монографія має таку структуру. У першому розділі розглядаються різні типи деформованих алгебр, які дають змогу описати особливості структури простору. А саме, вивчаються некомутативні алгебри канонічного типу, алгебри типу Лі, нелінійні деформовані алгебри.

У другому розділі досліджено систему частинок у просторі з деформованою алгеброю Гайзенберга. Знайдено оцінку для мінімальної довжини на підставі порівняння теоретичного результату для зміщення перигелію Меркурію, отриманого з врахуванням особливостей опису руху макроскопічного тіла у просторі

з мінімальною довжиною, та даних спостереження. Розглянуто лоренц-коваріантну гамільтонову механіку. Вивчено вплив мінімальної довжини на лоренц-коваріантну гамільтонову механіку. Досліджено релятивістську частинку у центральному потенціалі у просторі з мінімальною довжиною. Розглянуто задачу Кеплера в рамках загальної теорії відносності. Досліджено вплив на таку задачу мінімальної довжини. Також у розділі вивчено принцип еквівалентності. Результати, подані в розділі, опубліковано в [43, 74, 75].

У третьому розділі наведено аналіз особливостей опису руху системи багатьох частинок у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Досліджено рух планети Меркурій, системи Сонце-Земля Місяць і запропоновано умову на параметр імпульсної некомутативності при якій розв'язується проблема порушення слабого принципу еквівалентності у квантованому фазовому просторі. На основі дослідження зміщення перигелію Меркурію знайдено оцінки для параметрів координатної та імпульсної некомутативності. Результати, подані у розділі, опубліковано у [76–78].

У четвертому розділі досліджується проблема неінваріантності некомутативної алгебри відносно інверсії часу. Як приклад для дослідження симетрії відносно інверсії часу вивчається рух по колу. Ми знаходимо, що період колової орбіти частинки у гравітаційному полі у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу залежить від напрямку руху. Для відновлення симетрії відносно інверсії часу, а також сферичної симетрії пропонуємо будувати тензори координатної та імпульсної некомутативностей за допомогою імпульсів, які відповідають сферично-симетричній системі. Результати, наведені у цьому розділі, опубліковано у [79, 80].

Монографія завершується висновками та списком використаних джерел.

Наукове видання

Гнатенко Христина Павлівна,
Самар Микола Іванович,
Ткачук Володимир Михайлович

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА У КВАНТОВАНОМУ ПРОСТОРИ

Монографія

Редактор Н. Й. Плиса
Комп'ютерне верстання Х. П. Гнатенко
Обкладинка В. О. Роган

Формат 60×90 1/16
Наклад. 100 прим.

Умовн. друк. арк. 8, 5.
Зам.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво
про внесення суб'єкта видавничої справи
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Друк та палітурні роботи ТОВ «БУК-ДРУК»
вул. Мала Бердичівська, 17А, м. Житомир, 10014
тел. 073 101 22 33, e-mail: bookovych@gmail.com

Свідоцтво
про внесення суб'єкта видавничої справи
Серія ДК № 5610 від 21.09.2017 р.