

ISBN 978-617-10-0853-3

Оптимальне керування моделями соціально-економічної динаміки

у середовищі *Python*

В.М. Кирилич

О.В. Терещук

В.М. Флюд

Навчальний посібник

Львів
ЛНУ імені Івана Франка
2023

УДК 517;519.6;338

К 43

Рецензенти:

д-р. фіз.-мат. наук, проф. Бак С.М.

(Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського);

д-р. фіз.-мат. наук, проф. Бандура А.І.

(Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу);

д-р. фіз.-мат. наук, проф. Суц В.Н.

(Кошалінська Політехніка, Польща)

Рекомендовано Вченою Радою

Львівського національного університету імені Івана Франка.

Кирилич В.М., Терещук О.В., Флюд В.М. Оптимальне керування моделями соціально-економічної динаміки у середовищі *Python*: навч. посібник/ В.М.Кирилич, О.В.Терещук, В.М.Флюд – Львів: ЛНУ імені Івана Франка. 2023. – 405 с.

ISBN 978-617-10-0853-3

Розглянуто систематичний виклад середовища *Python* і його застосування у задачах оптимального керування, математичні моделі яких описуються за допомогою задач для звичайних і частинних диференціальних рівнянь. Наведено багато прикладів і задач для самостійного опрацювання. Крім того, подано задачі, які потребують додаткового опрацювання і можуть стати основою для курсових робіт.

Для студентів математичних, економічних та інших прикладних спеціальностей.

©Кирилич В.М., Терещук О.В., Флюд В.М., 2023

©Львівський національний університет імені Івана Франка, 2023

ISBN 978-617-10-0853-3

Зміст

| | |
|--|----------|
| Вступ | xi |
| 1 Короткий вступ до <i>Python</i> | 1 |
| 1.1. Синтаксис <i>Python</i> | 2 |
| 1.1.1. Модулі та пакети | 61 |
| 1.1.2. Завдання для самостійного опрацювання | 65 |
| 1.2. Короткий вступ до <i>NumPy</i> | 69 |
| 1.2.1. Приклади | 70 |
| 1.2.2. Друк масивів | 75 |
| 1.2.3. Основні операції | 76 |
| 1.2.4. Універсальні функції | 82 |
| 1.2.5. Індекссування, підмасиви, ітерування | 84 |
| 1.2.6. Маніпулювання формою масиву | 90 |
| 1.2.7. Копіювання та вигляд | 98 |
| 1.2.8. Функції та методи перегляду | 102 |
| 1.2.9. Менш основне | 103 |
| 1.2.10. Незвичайна індексація та трюки з індексами | 103 |
| 1.2.11. Лінійна алгебра | 114 |
| 1.2.12. Гістограми | 118 |
| 1.2.13. Інші джерела для опрацювання | 119 |
| 1.2.14. Завдання для самостійного опрацювання | 119 |
| 1.3. Короткий вступ до <i>SciPy</i> | 122 |
| 1.3.1. Інтегрування і звичайні диференціальні рівняння | 122 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 1.3.2. | Оптимізація, припасовування даних і чисельні методи розв'язування рівнянь | 146 |
| 1.3.3. | Завдання для самостійного опрацювання | 161 |
| 1.4. | Короткий вступ до <i>Matplotlib</i> | 167 |
| 1.4.1. | Прості графіки | 167 |
| 1.4.2. | Мітки, підписи, налаштування параметрів графіків | 173 |
| 1.4.3. | Графіки з спеціальними налаштуваннями параметрів | 176 |
| 1.4.4. | Графік у полярних координатах | 182 |
| 1.4.5. | Графік параметрично заданої функції | 183 |
| 1.4.6. | Побудова графіка на одному об'єкті осі | 184 |
| 1.4.7. | Кілька графіків на одному рисунку | 191 |
| 1.4.8. | Тривимірний графік у <i>Python</i> | 198 |
| 1.4.9. | Завдання для самостійного опрацювання | 203 |
| 1.5. | Застосування <i>Python</i> до розв'язування моделей | 207 |
| 1.5.1. | Модель популяції моли spruce budworm | 207 |
| 1.5.2. | Моделі виживання. | 212 |
| 1.5.3. | Завдання для самостійного опрацювання | 226 |
| 2 | Математичний апарат оптимального керування | 230 |
| 2.1. | Оптимізація функціоналів | 230 |
| 2.2. | Абстрактна модель оптимального керування | 234 |
| 2.3. | Рівняння Euler'a | 236 |
| 2.4. | Оптимальне керування гіперболічними системами | 241 |
| 2.5. | Модель Solow | 244 |
| 2.6. | Завдання для самостійного опрацювання | 248 |
| 3 | Формулювання задачі оптимального керування | 253 |
| 3.1. | Загальні поняття про керовані системи | 253 |
| 3.2. | Задача керування з закріпленими кінцями | 255 |
| 3.3. | Задача оптимального керування | 256 |
| 3.4. | Завдання для самостійного опрацювання | 258 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4 | Принцип максимуму | 261 |
| 4.1. | Принцип максимуму для задачі з закріпленими кінцями | 261 |
| 4.2. | Принцип максимуму з нескінченним обрієм керування | 266 |
| 4.3. | Схема застосування принципу максимуму | 268 |
| 4.4. | Задача з нефіксованим часом керування | 273 |
| 4.5. | Задача оптимального керування з рухомими кінцями | 277 |
| 4.6. | Економічна інтерпретація функцій спряженої системи | 281 |
| 4.7. | Ілюстрація варіаційного принципу максимуму | 284 |
| 4.8. | Рівняння Bellman'a | 287 |
| 4.9. | Завдання для самостійного опрацювання | 291 |
| 5 | Розв'язування задач оптимального керування у Python | 296 |
| 5.1. | Формулювання задачі оптимального керування | 297 |
| 5.2. | Умови оптимальності першого порядку | 298 |
| 5.3. | Необхідні умови у випадку дискретизованої системи | 304 |
| 5.4. | Чисельний розв'язок задачі оптимального керування | 305 |
| 5.5. | Непрямі методи розв'язування задачі оптимального керування | 306 |
| 5.5.1. | Пошук чисельного розв'язку за допомогою непрямого методу | 306 |
| 5.6. | Прямі методи розв'язування задачі оптимального керування | 321 |
| 5.6.1. | Модуль <code>gekko</code> | 322 |
| 6 | Оптимальне керування моделями | 336 |
| 6.1. | Математична модель оптимального використання енергії | 336 |
| 6.2. | Однофакторна модель оптимального економічного зростання | 339 |
| 6.3. | Вплив податкових відрахувань | 344 |
| 6.4. | Завдання для самостійного опрацювання | 351 |
| 7 | Математичні моделі біологічних спільнот | 354 |
| 7.1. | Оптимальне керування популяції | 355 |
| 7.2. | Задача про максимальний урожай | 359 |

| | |
|--|------------|
| 7.3. Динаміка і керування віковою структурою популяції . . . | 364 |
| 7.4. Задача з умовою за віковим обмеженням популяції . . . | 369 |
| 7.5. Завдання для самостійного опрацювання | 375 |
| Список літератури | 379 |
| Предметний покажчик | 386 |

Перелік ілюстрацій

| | | |
|------|---|-----|
| 1.1 | Множина Mandelbrot'а | 110 |
| 1.2 | Гістограми | 119 |
| 1.3 | Графік підінтегральної функції <code>myfunc2(x)</code> | 125 |
| 1.4 | Фігура, обмежена кардіоїдою $\rho = 2 + 2 \cos \theta$ та колом $\rho = 2$ (зовні кола) | 128 |
| 1.5 | Експоненціальне спадання концентрації реагенту у реакції першого порядку: точний розв'язок і розв'язок чисельним методом у точках, визначених методом розв'язування IVP ODE | 134 |
| 1.6 | Експоненціальне спадання концентрації реагенту у реакції першого порядку: точний розв'язок і розв'язок чисельним методом наперед визначених точках | 136 |
| 1.7 | Дві взаємно пов'язані реакції першого порядку: чисельний і аналітичний (точний) розв'язки | 139 |
| 1.8 | Генератор гармонічних коливань: чисельний і точний (аналітичний) розв'язки | 142 |
| 1.9 | Система хімічних рівнянь (реакцій) Robertson'а, чисельно проінтегрована методом Radau ІА | 146 |
| 1.10 | Графік функції Himmelblau | 148 |
| 1.11 | Лінії рівня функції Himmelblau | 149 |
| 1.12 | Графік полінома $P(x) = x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 28x + 48$ | 159 |
| 1.13 | Простий лінійний (x, y) графік | 168 |
| 1.14 | Проста точкова діаграма | 169 |

| | | |
|------|--|-----|
| 1.15 | Графік функції $y = \cos^2 x$ | 171 |
| 1.16 | Графіки функцій $y = \cos^2 x$ і $y = \cos^3 x$ | 173 |
| 1.17 | Графіки функцій $f_n(x) = x^n \cos x$ ($n = 1, 2, 3, 4$) | 176 |
| 1.18 | Графіки функцій $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y_2(x) = e^{-\sqrt{2}x}$ | 179 |
| 1.19 | Графіки функції $y(x) = x + e^{x+\sin(20x)}$ | 181 |
| 1.20 | Закон Мооге'а, який моделює експоненціальне зростання кількості транзисторів РСU | 183 |
| 1.21 | Графік параметрично заданої функції – циклоїди | 185 |
| 1.22 | Вікно графіка функції з додатковими параметрами методу <code>plt.figure</code> | 186 |
| 1.23 | Простий графік із двох ліній в одному об'єкті <code>Axes</code> | 187 |
| 1.24 | Графік циклоїди | 189 |
| 1.25 | Система координат з осями і побудовані графіки | 191 |
| 1.26 | Графіки поширення тепла у двох металах | 194 |
| 1.27 | Лінії рівня гіперболічного параболоїда | 196 |
| 1.28 | Графік ліній рівня з підписами | 197 |
| 1.29 | Графіки однієї функції побудовані різними способами | 200 |
| 1.30 | Графіки тора з різними кутами спостереження | 201 |
| 1.31 | Тривимірний графік спіралі | 202 |
| 1.32 | Графік $p(N)$ на проміжку $[0, 20]$ для $B = 1.5$, $A = 2$ | 209 |
| 1.33 | Графіки $N(t)$ за різних вхідних даних: а) $r = 0.3$, $K = 5$, $A = 2$, $b = 1.5$, $T = 20$, $N(0) = 30$; б) $r = 1$, $K = 10$, $A = 3$, $b = 2$, $T = 10$, $N(0) = 50$ | 210 |
| 1.34 | Графіки приплоду комах для $r = 0.3$, $K = 5$, $T = 20$, $N(0) = 30$, для значень $u = 0.5, 1, 2, 3$. Обчислені значення популяції комах залежно від u | 213 |
| 1.35 | Графіки зміни динаміки популяцій моделі хижак-жертва | 216 |
| 1.36 | Графіки зміни динаміки популяцій моделі хижак-жертва з даними з файлу <code>Model_Prey_Predator_2.txt</code> | 218 |
| 1.37 | Графіки станів збудження та відновлення | 221 |
| 1.38 | Графіки станів збудження та відновлення у випадку подразника і графік у фазовій площині | 222 |
| 1.39 | Графік функції Courant'а першого порядку | 226 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Існування розв'язку рівняння (2.5.4) | 248 |
| 3.1 | Траєкторія системи | 255 |
| 4.1 | Максимізація функції Hamilton'а з прикладу 4.3.1 | 272 |
| 4.2 | Варіанти керування | 273 |
| 4.3 | Перехід стану системи з точки на множину | 278 |
| 5.1 | Графіки оптимальної траєкторії та оптимального керування задачі з прикладу 5.2.1 | 304 |
| 5.2 | Графіки оптимальної траєкторії та оптимального керування задачі з прикладу 5.5.1 | 315 |
| 5.3 | Розв'язок задачі оптимального керування інсулінотерапії з прикладу 5.5.2 | 320 |
| 5.4 | Оптимальні змінні керування задачі оптимального керування з прикладу 5.6.1 | 329 |
| 5.5 | Оптимальні змінні стану задачі оптимального керування з прикладу 5.6.1 | 330 |
| 5.6 | Графік оптимального обприскування шкідників для $\xi = 0.05$, приклад 5.6.2 | 334 |
| 5.7 | Графік оптимального обприскування шкідників для $\xi = 0.1$, приклад 5.6.2 | 335 |

Перелік таблиць

| | | |
|------|---|-----|
| 1.1 | Прості арифметичні дії у <i>Python</i> | 8 |
| 1.2 | Пріоритети арифметичних операцій | 9 |
| 1.3 | Список вмонтованих функцій середовища <i>Python</i> | 11 |
| 1.4 | Деякі функції модуля <code>math</code> | 14 |
| 1.5 | Оператори порівняння <i>Python</i> | 16 |
| 1.6 | Найчастіше вживані <code>esc</code> -последовності | 19 |
| 1.7 | Деякі методи перетворення стрічок | 22 |
| 1.8 | Деякі часто вживані методи списків у <i>Python</i> | 29 |
| 1.9 | Методи множини <code>set</code> | 54 |
| 1.10 | Модулі та пакети <i>Python</i> | 64 |
| 1.11 | Методи інтегрування ODE для <code>scipy.integrate.solve_ivp</code> | 142 |
| 1.12 | Опис інформації, яка міститься у словнику, який повертає метод <code>scipy.optimize.minimize</code> | 151 |
| 1.13 | Деякі методи оптимізації, які використовують у методі <code>scipy.optimize.minimize</code> | 153 |
| 1.14 | Специфікатори місця розташування опису графіка | 174 |
| 1.15 | Найбільш вживані стилі маркерів бібліотеки <i>Matplotlib</i> | 177 |
| 1.16 | Буквені та стрічкові позначення кольорів <i>Matplotlib</i> | 177 |
| 1.17 | Стилі лінії <i>Matplotlib</i> | 178 |
| 1.18 | Аргументи метода <code>plt.figure</code> | 185 |
| 1.19 | Режими доступу до файлу | 217 |

Вступ

У цьому посібнику описано середовище *Python* для операційної системи Windows[®] та його застосування до обчислення задач і моделей математичної економіки, зокрема оптимального керування соціально-економічними процесами, які можна описати диференціальними рівняннями. Оскільки будь-яка економічна система має визначену мету функціонування (критерій якості), а також свободу вибору, то математичним апаратом для таких систем є теорія оптимального керування (динамічна оптимізація).

У навчальному виданні проаналізовано деякі задачі оптимального керування соціально-економічної динаміки моделями економіки, біології, теорії популяцій, природоохоронної діяльності тощо, тому зроблено детальний аналіз методів теорії оптимального керування, зокрема, огляд принципу максимуму для одержання необхідних умов оптимальності та принципу Bellman'a.

Посібник складається зі вступу та семи розділів, завдань для самостійної роботи, додатків і списку літератури. Для зручності читачів створено списки графіків і таблиць, які поміщені на початку посібника. Крім того, подано індексний перелік важливих термінів, які використано у навчальному посібнику.

Перший розділ присвячено системі *Python*, починаючи від основ програмування у програмному середовищі, спеціальних обчислень, операторів керування, побудови графіків, побудови програм і процедур.

У другому розділі розглянуто математичний апарат оптимального керування, зокрема із використанням теорії систем диференціальних

рівнянь і рівнянь із частинними похідними та їхнім застосуванням у економічних процесах.

Третій розділ присвячений формулюванню задач оптимального керування для звичайних диференціальних рівнянь і систем.

У четвертому розділі посібника наведено основні засади принципу максимуму з застосуванням до задач оптимального керування у різних формулюваннях. У цьому розділі також описано математичний алгоритм оптимального керування, принцип максимуму Понтрягіна та його застосування у багатьох конкретних задачах, наведено принцип Bellman'a, який гарантує існування достатніх умов оптимальності відповідних задач.

П'ятий розділ навчального посібника присвячений оптимальному керуванню соціально-економічними процесами. Наведено теоретичні обґрунтування існування оптимального керування, алгоритми знаходження розв'язків досліджуваних моделей.

У шостому розділі описано математичні моделі біологічних спільнот та застосування оптимального керування у задачах оптимальних популяцій.

Посібник укладено так, що у кожному розділі розглянуто конкретні приклади, подано рекомендації до розв'язування самостійних завдань, сформульовано завдання для самостійного опрацювання, які можуть слугувати основою для написання курсових чи магістерських робіт.

Наведено велику кількість літературних джерел, частина з яких доступна в електронних варіантах і легко використати для самостійної роботи. У розгляді конкретних тем є літературні посилання. Зазначимо, що наявність великої кількості літературних першоджерел із теорії оптимального керування соціально-економічними процесами свідчить про те, що проповідані методи та підходи з використанням програмного середовища *Python* відкривають можливості для ефективного і простого розв'язування прикладних задач оптимального керування системами звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними.

У посібнику використано пороздільну нумерацію формул, де перший номер (прикладів, завдань тощо) означає номер розділу, другий – номер підрозділу, далі порядковий номер формули. Подібно пронуме-

ровано рисунки та таблиці (першим є число, що означає номер розділу, другим – порядковий номер рисунка чи таблиці).

Навчальний посібник розрахований для студентів старших курсів бакалаврських і магістерських програм, укладений так, що є лише певною канвою і потребує від учасників навчального процесу додаткового самостійного опанування з багатьох математичних і природознавчих чи економічних понять і суджень. Курс читали та проводили виробничі практики впродовж декількох років для студентів механіко-математичного факультету, освітньої програми "Математична економіка та економетрика" Львівського національного університету імені Івана Франка. Доповнено завданнями для самостійного опрацювання, застосування *Python* для знаходження розв'язків сформульованих задач.

Автори

Навчальне видання

Кирилич Володимир Михайлович
Терещук Оксана Володимирівна
Флод Володимир Михайлович

**Оптимальне керування моделями соціально-економічної
динаміки у середовищі *Python***

Навчальний посібник

Редактор *Н. Й. Плиса*
Комп'ютерний набір і верстання *В. М. Флод*

Формат 60 × 84/16. Умовн. друк. арк. 23.5. Тираж 50 прим.

Видавець та виготовлювач:
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

СВІДОЦТВО

про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК №3059 від
13.12.2007 р.