

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка

Г. А. Квасниця, М. М. Притула, О. Я. Прядко

# ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

У двох частинах

Частина 2

## МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Львів  
2023

УДК 519.2(075.8)

К 32

Рецензенти:

д-р тех. наук, професор Г. М. Жолткевич  
(Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна);

д-р тех. наук, професор А. Я. Бомба  
(Національний університет водного господарства та природокористування);

д-р фіз.-мат. наук, професор Д. І. Боднар  
(Західноукраїнський національний університет)

*Рекомендовано до друку Вченою радою  
Львівського національного університету імені Івана Франка.  
Протокол № 48/5 від 31 травня 2023 року.*

**Квасниця Г. А.**

К 32 Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник.  
У 2-х ч. – Ч. 2. Математична статистика / Г. А. Квасниця, М. М. Пригула,  
О. Я. Прядко. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2023. – 160 с.  
ISBN 978-617-19-0336-1 (Заг.)  
ISBN 978-617-10-0825-0 (Ч. 2)

У другій частині навчального посібника подано основні теоретичні відомості математичної статистики. Матеріал поділено на 6 розділів, кожен з яких містить приклади розв'язування типових задач, та задачі для самостійного опрацювання.

Для студентів вищих навчальних закладів.

**УДК 519.2(075.8)**

ISBN 978-617-19-0336-1 (Заг.)  
ISBN 978-617-10-0825-0 (Ч. 2)

© Квасниця Г. А., Пригула М. М.,  
Прядко О. Я., 2023

© Львівський національний університет  
імені Івана Франка, 2023

---

## Зміст

Вступ .....	5
<b>РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ .....</b>	<b>9</b>
1.1. Табличне та графічне подання статистичного матеріалу .....	9
1.2. Емпірична функція розподілу .....	12
1.3. Числові характеристики статистичного матеріалу .....	14
1.3.1. Статистики центральної тенденції .....	15
1.3.2. Статистики розсіяння .....	16
1.3.3. Інтерквантильні широти .....	17
1.3.4. Моменти статистичного матеріалу .....	19
1.3.5. Статистики форми .....	21
Завдання для самостійної роботи .....	32
<b>РОЗДІЛ 2. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ.....</b>	<b>36</b>
2.1. Поняття статистичної гіпотези.....	36
2.2. Схема статистичного доведення.....	40
2.3. Критерій Пірсона .....	41
Завдання для самостійної роботи .....	48
<b>РОЗДІЛ 3. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ СТАТИСТИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ.....</b>	<b>51</b>
3.1. Поняття статистичної оцінки параметрів розподілу .....	51
3.2. Метод максимуму правдоподібності .....	53
3.3. Гіпотези про параметри нормального розподілу .....	57
3.3.1. Перевірка гіпотези про математичне сподівання .....	57
3.3.2. Порівняння сподівань двох нормальних розподілів.....	62
3.3.3. Гіпотеза про дисперсію нормальної популяції.....	66
3.3.4. Гіпотеза про рівність дисперсій двох нормально розподілених сукупностей.....	68
3.4. Інтервальні оцінки параметрів розподілу.....	70
3.4.1. Довірчий інтервал для математичного сподівання .....	71
3.4.2. Інтервал довіри для дисперсії нормально розподіленої генеральної сукупності.....	72
Завдання для самостійної роботи .....	73

<b>РОЗДІЛ 4. КРИТЕРІЇ ПОГОДЖЕНОСТІ.....</b>	<b>78</b>
4.1. Одновибірковий критерій погодженості Колмогорова.....	78
4.2. Двовибірковий критерій погодженості Смірнова.....	81
4.3. Порядкові критерії.....	83
4.3.1. Критерій знаків.....	84
4.3.2. Гіпотеза про медіану.....	85
4.3.3. Критерій інверсій.....	85
Завдання для самостійної роботи.....	87
<b>РОЗДІЛ 5. ВАРІАНСНИЙ АНАЛІЗ.....</b>	<b>91</b>
5.1. Однофакторний варіансний аналіз.....	91
5.2. Двофакторний варіансний аналіз.....	96
5.3. Трифакторний варіансний аналіз.....	100
5.4. Варіансний аналіз за схемою латинського квадрата.....	106
Завдання для самостійної роботи.....	112
<b>РОЗДІЛ 6. ОСНОВИ КОРЕЛЯЦІЙНОГО ТА РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ.....</b>	<b>119</b>
6.1. Кореляційний аналіз.....	119
6.1.1. Коваріація.....	119
6.1.2. Кореляція.....	120
6.1.3. Регресія.....	121
6.1.4. Лінійно залежні та некорельовані випадкові змінні.....	122
6.2. Прямі регресії.....	124
6.3. Кореляції вищих порядків.....	134
6.4. Варіанси вищих порядків.....	137
6.5. Регресії вищих порядків.....	137
Завдання для самостійної роботи.....	138
<b>Додатки.....</b>	<b>142</b>
<b>Предметний покажчик.....</b>	<b>155</b>
<b>Список літератури.....</b>	<b>157</b>

---

## ВСТУП

Ми живемо у Всесвіті, що розвивається в часі. Напряму часу означений тим, що Всесвіт розширюється. Сучасним астрономічним приладам доступна ділянка простору радіусом понад десять мільярдів світлових років (світловий рік – одиниця міжзоряних відстаней: шлях, який світло проходить за рік, тобто  $9.46 \cdot 10^{12}$  км). У цій частині Всесвіту спостерігаємо близько  $10^{10}$  галактик або наближено  $10^{20}$  зірок. Однією з таких галактик є Молочний шлях, а однією з таких зірок – наше Сонце. У доступній частині Всесвіту відбуваються найрізноманітніші явища та процеси. Все в ній рухається та змінюється і подає інформацію про своє існування. Завдання науки – вибрати з цього величезного потоку інформації практично важливі дані та розшифрувати їх. Одній людині фізично не під силу зайнятися вивченням різних явищ, які розвиваються в часі. Тому з огляду на кінцеву мету вивчення явищ люди створили різні методи вивчення різноманітних явищ і навіть різні методи вивчення тих самих явищ. Звідси походить поділ науки на різні дисципліни, а також поділ явищ, які пов'язані з діяльністю людини. На думку англійського статистика Карла Пірсона, жодне наукове дослідження не є остаточним, це лише найімовірніший висновок, який можна вивести з наявних у розпорядженні автора даних. Більш повний набір фактів, досконалий аналіз, експеримент і спостереження приводять до нових формул і теорій. У цьому суть розвитку науки.

Часто потрібно вивчати явища, точний перебіг яких неможливо передбачити і які є не поодинокими, а масовими. Такі явища називають *масовими випадковими*. Масові випадкові явища, залежні від часу, називають *випадковими*, або *стохастичними процесами*. Масові випадкові явища – це вияви певної мінливої (випадкової) величини. Значення такої мінливої величини в заданий момент часу

передбачити неможливо, але на підставі експериментів можна зафіксувати її певні значення, окремі реалізації. Оскільки мінливу величину пізнаємо на підставі спостереження, тобто внаслідок відповідно поставлених експериментів, то її називають ще **статистичною змінною**, а сукупність даних цих спостережень – **статистичними даними**, або **статистичним матеріалом**. Кожне окреме спостереження називають **елементом статистичного матеріалу**.

Три терміни: мінлива величина, випадкова величина та статистична змінна мають еквівалентні значення.

Математична статистика – це розділ математики, предметом якого є розроблення раціональних прийомів і методів отримання, опису й опрацювання експериментальних даних з метою вивчення закономірностей масових випадкових явищ.

Головні завдання математичної статистики такі:

- визначення за статистичними даними законів розподілу випадкових величин і параметрів цих розподілів;
- визначення за статистичними даними виду зв'язку між різними явищами (об'єктами) або властивостями того самого явища (об'єкта), а також сили цього зв'язку;
- перевірка вірогідності статистичних гіпотез;
- розроблення рекомендацій щодо проведення експерименту й опрацювання його результатів.

Мінливі величини діляться на:

- 1) якісні та кількісні;
- 2) дискретні та неперервні;
- 3) одновимірні, двовимірні і т. д.

Мінлива величина може бути кількісною, неперервною та тривимірною, або якісною, дискретною й одновимірною й т. д. Якісні варіанти будемо позначати  $A, B, C, \dots$ , кількісні –  $\xi, \eta, \zeta, \dots$

**Приклади якісних мінливих** величин: яскравість зірок, ступінь захмареності в цій місцевості, колір очей, стать.

**Приклади кількісних** величин: кількість зерен у головці маку, кількість бракованих виробів за зміну на якомусь виробництві масової продукції.

**Приклади дискретних:** кількість пелюсток на квітці бузку, кількість осіб у сім'ї, кількість букв у слові, кількість телефонних викликів за одиницю часу.

**Приклади неперервних:** ріст допризовників, тривалість телефонної розмови.

Приклади  $n$ -вимірних мінливих величин: вік, ріст і вага людини – тривимірна величина; кількість і вага зерен одного складного колоса озимої пшениці – двовимірна величина.

Вибір мінливої величини під час дослідження випадкового явища є справою зручності. Те саме випадкове явище можна досліджувати за допомогою якісної або кількісної мінливої величини.

**Приклад 1.** Перехід якісної в кількісну статистичну змінну.

Землетрус може бути

- непомітний (1 бал);
- дуже слабкий (2 бали);
- слабкий (3 бали);
- помірний (4 бали);
- досить сильний (5 бали);
- сильний (6 балів);
- дуже сильний (7 балів);
- руйнівний (8 балів);
- спустошливий (9 балів);
- знищувальний (10 балів);
- катастрофа (11 балів);
- сильна катастрофа (12 балів).

**Приклад 2.** У стародавньому Єгипті для вимірювання рівня виловів риби у річці Ніл побудували колодязі. В різні роки зареєстровано максимальний рівень виловів у ліктях (міра 3 лікті = 1 метр). За багато століть одержано такі значення максимального рівня виловів:

- 12 ліктів – голод;
- 13 ліктів – достаток;
- 14 ліктів – радість;
- 15 ліктів – спокій;
- 16 ліктів – багатство;
- 17 ліктів – неспокій;

18 ліктів – тривога;

19 ліктів – руйнування, голод;

20 ліктів – катастрофа, епідемія.

Якщо кількість спостережень в межах від 2 до кільканадцяти, то статистичний матеріал називають малим статистичним матеріалом; від кільканадцяти до кількадесяти – то статистичний матеріал середній; в межах від кількадесяти до кількисот – великий. Якщо кількість спостережень дорівнює багатьом сотням, тисячам тощо, то статистичний матеріал дуже великий, колосальний, гігантський і т. д. Такий поділ не є строгим.

Залежно від обсягу статистичного матеріалу існують різні математичні методи його опрацювання, а також використовують обчислювальну техніку різної потужності від рахівниць і арифмометрів до найсучасніших комп'ютерів.

Статистичний матеріал може бути дуже непроглядний. Про такий первісний статистичний матеріал кажуть, що він сирий. Стосовно сирого статистичного матеріалу виникає таке питання: як компактно подати статистичний матеріал. Компактно означає зручно для аналізу та прогнозу.

Статистичний матеріал можна подати словесно, таблично, графічно й аналітично.



Навчальне видання

**КВАСНИЦЯ Галина Андріївна**  
**ПРИТУЛА Микола Миколайович**  
**ПРЯДКО Ольга Ярославівна**

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ**  
**ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**

У двох частинах

**Частина 2**  
**Математична статистика**

Навчальний посібник

Редактор *Н. Й. Плиса*  
Комп'ютерне верстання *І. В. Мазінг*  
Обкладинка *В. О. Рогана*

Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Умовн. друк арк. 9,3.  
Тираж 100 прим. Зам.

ВИДАВЕЦЬ ТА ВИГОТІВНИК:  
Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000.

СВІДОЦТВО  
про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції.  
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007.

**Квасниця Г. А.**

- К 32 Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник.  
У 2-х ч. – Ч. 2. Математична статистика / Г. А. Квасниця, М. М. Притула,  
О. Я. Прядко. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2023. – 160 с.  
ISBN 978-617-19-0336-1 (Заг.)  
ISBN 978-617-10-0825-0 (Ч. 2)

У другій частині навчального посібника подано основні теоретичні відомості математичної статистики. Матеріал поділено на 6 розділів, кожен з яких містить приклади розв'язування типових задач, та задачі для самостійного опрацювання.

Для студентів вищих навчальних закладів.

**УДК 519.2(075.8)**