

В. А. Козицький

# **МАТЕМАТИЧНА ТЕОРІЯ НЕКООПЕРАТИВНИХ ІГОР**

Ігри в нормальній формі: концепції розв'язання

Підручник

Львів  
ЛНУ імені Івана Франка  
2023

УДК 519.83

К 59

**Рецензенти:**

д-р фіз.-мат. наук, проф. *І. І. Король*  
(Ужгородський національний університет);

д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. І. Бандура*

(Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу);

д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. С. Ільків*

(Національний університет “Львівська політехніка” )

*Рекомендовано до друку Вченою Радою*

*Львівського національного університету імені Івана Франка.*

*Протокол № 48/5 від 31.05.2023 р.*

**Козицький В. А.**

К 59

Математична теорія некооперативних ігор. Ігри в нормальній формі: концепції розв’язання : підручник / В. А. Козицький. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2023. – 288 с.

ISBN 978-617-10-0808-3

Підручник укладено на підставі курсу лекцій з теорії ігор і дослідження операцій, теорії ігор і прийняття рішень, математичної економіки, який читають на механіко-математичному факультеті ЛНУ ім. І. Франка.

Викладено основи теорії некооперативних ігор у нормальній формі. Подано базові поняття та концепції розв’язання некооперативних ігор у нормальній формі. Значна увага приділена рівновазі за Нешом та її рафінуванні. Наведено моделі, методи й алгоритми, що визначають процеси прийняття рішень у соціально-економічних системах. Теоретичні основи проілюстровано численними прикладами практичних застосувань.

Для бакалаврів, магістрів, аспірантів економічних і математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**УДК 519.83**

ISBN 978-617-10-0808-3

© Козицький В.А., 2023

© Львівський національний  
університет імені Івана Франка, 2023

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>6</b>
<b>1 Некооперативні ігри в нормальній формі</b>	<b>8</b>
1.1 Ігри в нормальній формі . . . . .	8
1.1.1 Ігри олігополії . . . . .	15
1.1.2 Матричні ігри . . . . .	18
1.1.3 Біматричні ігри . . . . .	21
1.2 Гра в нормальній формі: концепції розв'язання . . . . .	28
1.2.1 Домінуючі та доміновані стратегії . . . . .	28
1.2.2 Максимінні та оптимальні стратегії . . . . .	37
1.2.3 Процедура послідовного викреслення домінованих стратегій . . . . .	45
1.3 Опуклість і теореми про нерухому точку . . . . .	51
1.4 Рівновага Неша . . . . .	56
1.4.1 Рівновага Неша в грі $n$ осіб . . . . .	56
1.4.2 Рівновага за Штакельбергом . . . . .	66
1.4.3 Рівновага Неша і моделі олігополістичної конкуренції . . . . .	69
1.4.4 Кількісна модель олігополії . . . . .	70
1.4.5 Дуополія Курно з лінійною функцією попиту . . . . .	74
1.4.6 Модель Бертрана . . . . .	84
1.4.7 Дуополія Хотелінга . . . . .	90
1.4.8 Дуополія Хотелінга на площині . . . . .	92
1.5 Рівноважні точки гри двох осіб з нульовою сумою . . . . .	95
1.6 Результат викреслення домінованих стратегій . . . . .	98

1.7	Змішане розширення скінченої гри . . . . .	104
1.7.1	Змішані стратегії . . . . .	104
1.7.2	Змішане розширення скінченої гри . . . . .	105
1.7.3	Раціоналізація . . . . .	108
1.7.4	Рівновага за Нешом у змішаних стратегіях . . . . .	112
1.8	Обчислення рівноваги за Нешом . . . . .	117
1.8.1	Задача нелінійної оптимізації. Застосування умов оптимальності Куна-Таккера . . . . .	117
1.8.2	Обчислення рівноваги за Нешом . . . . .	121
1.9	Існування рівноваги за Нешом . . . . .	129
1.10	Біматричні ігри . . . . .	132
1.10.1	Властивості біматричних ігор . . . . .	132
1.10.2	Алгоритми розв'язання біматричних ігор . . . . .	135
1.11	Матричні ігри . . . . .	152
1.11.1	Властивості матричних ігор . . . . .	152
1.11.2	Алгоритми обчислення оптимальних стратегій матричних ігор . . . . .	155
1.11.3	Прийняття рішень в умовах невизначеності . . . . .	168
1.12	Змішане розширення нескінченої гри . . . . .	175
1.12.1	Змішане розширення нескінченої гри. Теорема Гліксберга . . . . .	175
1.12.2	Неперервні ігри двох осіб з нульовою сумою на прямокутнику . . . . .	180
1.12.3	Опуклі (увігнуті) ігри . . . . .	183
1.13	Додаток . . . . .	187
<b>2</b>	<b>Теорія вибору рівноваги в скінчених іграх</b> . . . . .	<b>192</b>
2.1	Уточнення концепції рівноваги Неша в іграх . . . . .	192
2.2	Досконала рівновага . . . . .	198
2.3	Правильна рівновага . . . . .	209
2.4	Строга рівновага . . . . .	212
2.5	Сильна рівновага . . . . .	213
2.6	Еволюційно стійкі стратегії . . . . .	216
2.7	Корельована рівновага . . . . .	226

<b>3</b>	<b>Задачі</b>	<b>239</b>
3.1	Задачі до розділу 1 . . . . .	239
3.2	Задачі до розділу 2 . . . . .	251
3.3	Індивідуальні завдання . . . . .	258
	<b>Список літератури</b>	<b>279</b>

# Вступ

Теорія ігор – це математична теорія прийняття рішень в умовах конфлікту, тобто в умовах, коли стикаються інтереси двох або більше сторін, які мають різні (інколи протилежні) цілі. Вона вивчає математичне моделювання стратегічної поведінки осіб (гравців), які приймають рішення в ситуації, коли поведінка одного гравця може вплинути на поведінку інших гравців. Конфліктні ситуації виникають під час вирішення різноманітних економічних проблем (відносини між організаціями-виробниками та споживачами, торгівля, економічна конкуренція тощо), військових справ, транспортних задач, задач логістики, біології, медицини тощо. В теорії ігор учасників конфлікту називають гравцями, а рішення, які вони приймають, – стратегіями. Цілі учасників конфлікту описують за допомогою дійсних функцій – функцій виграшу (функцій корисності, функцій прибутку або витрат). Задача теорії визначає: оптимальну поведінку в грі, дослідження властивостей оптимальної поведінки, визначення умов за яких їхнє використання змістовне. В теорії ігор існує багато різних підходів до визначення оптимальної поведінки. Відмінності залежать від того, які припущення можуть бути зроблені про ступінь інформованості гравців у процесі гри. Зазвичай ігри поділяють на дві складові частини – некооперативні та кооперативні. У класичній теорії ігор кооперативні та некооперативні ігри трактують цілком по-різному і різниця між цими двома класами ігор відіграє дуже важливу роль. Джон Неш [49-51] першим увів цю різницю, визначивши кооперативні ігри як ігри, які допускають вільний обмін інформацією і примусові угоди між гравцями, на відміну від некооперативних ігор, які не допускають ні вільного обміну інформацією, ні примусових угод. Класична теорія некооперативних ігор є за змістом теорією однієї базової концепції розв'язку – концепції ситуації рівноваги за Нешом. За останні роки концепція стала популярною та водночас турбує її філософське і логічне обґрунтування. Фундаментальні роботи Джона Харшаньї і Рейнхарда Зельтена [23-26] засвідчили необхідність і можливість узагальнення концепції рівноваги за Нешом. Теорія

ігор – розгалужена наука, що широко використовує результати сучасної математичної теорії. Багато фактів теорії ігор мають складну природу і встановлюються з використанням сучасної топології, функціонального аналізу, методів оптимізацій тощо.

Підручник присвячений некооперативним іграм в нормальній формі і складається з двох частин. У першій частині підручника викладено математичну теорію й основні концепції некооперативних ігор у нормальній формі. Наведено приклади побудови некооперативних ігор, концепції розв’язання та дослідження. Усі наведені результати проілюстровано на багатьох прикладах. Друга частина підручника присвячена вивченню уточнення концепції рівноваги Неша. Наведено конструкцію уточнення Дж. Харшанї і Р. Зельтена, а також описано еволюційно стійкі стратегії та корельовану рівновагу. Наведені результати проінтерпретовані на численних прикладах. Кожний розділ підручника доповнено задачами. Матеріали підручника містять фундаментальні та прикладні аспекти застосування теоретико-ігрового підходу.

Навчальне видання

Козицький Валерій Андрійович

# Математична теорія некооперативних ігор Ігри в нормальній формі: концепції розв'язання

Підручник

Редактор *Н. Й. Плиса*

Комп'ютерний набір і верстання *В. А. Козицький*  
Обкладинка *С. З. Сенік*

Формат 60×84/16. Умовн. друк. арк. 16,74. Тираж 300 прим.

Видавець і виготовлювач:

Львівський національний університет імені Івана Франка.

вул. Університетська, 1. 79000, Львів.

Свідоцтво

про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,  
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції:

Серія ДК № 3059 від 13.12.2007р.