

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Б. М. Тріщ

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Твердження, приклади і задачі

Львів
2023

УДК 51(076)
Т 69

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. С. Льків*
(НУ “Львівська політехніка”);
д-р фіз.-мат. наук, проф. *Б. І. Копитко*
(Ченстоховський політехнічний університет, Республіка Польща);
д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. А. Кривень*
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

*Рекомендовао до друку Вченою радою
Львівського національного університету імені Івана Франка.
Протокол № 22/11 від 24 листопада 2021 року.*

Тріщ Б. М.
Т 69 Вища математика для економістів. Твердження, приклади і задачі / Б. М. Тріщ. –
Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2023. – 496 с.

ISBN 978-617-10-0797-0

Наведено головні теореми й означення лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу. Описано розв’язування типових задач і задачі для самостійного розв’язування. Особливу увагу приділено задачам економічного змісту, моделям, для опису яких використовують методи вищої математики. Матеріал, викладений у посібнику, відповідає програмі курсу вищої математики для економічних спеціальностей вищих закладів освіти.

Для студентів економічних спеціальностей.

УДК 51(076)

ISBN 978-617-10-0797-0

© Б. М. Тріщ, 2023
© Львівський національний університет
імені І. Франка, 2023

ПЕРЕДМОВА

Перехід до ринкової економіки потребує підготовки економістів, які добре володіють математичним апаратом і можуть його застосовувати для розв'язування теоретичних та прикладних задач. Важливим і визначальним у підготовці майбутніх економістів та підприємців є курс вищої математики, який дає потрібні знання для вивчення інших дисциплін математичного циклу, наприклад, таких як математичне програмування, фінансова математика, теорія ймовірностей, математична статистика, математичні методи дослідження операцій, а також виробляє навички математичного дослідження задач економіки.

У навчальному посібнику сформульовано головні теореми та означення лінійної алгебри, векторної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу і диференціальних рівнянь. Наведено розв'язки багатьох типових задач і задачі для самостійного розв'язування. У викладенні матеріалу, де це можливо, подано економічний зміст уведених математичних понять, наведено математичні формулювання деяких економічних законів, розглянуто застосування вищої математики до задач економіки. Наприклад, описано балансові моделі, виробничі функції та їхні властивості, граничний аналіз, моделі економічної динаміки. Такі застосування розраховані на рівень знань економіки студентів першого курсу.

Для дослідження економічних процесів широко використовують комп'ютерну техніку, тому в посібнику наведено основи практичного застосування математичного пакета MAPLE.

Головне завдання, яке ставили під час написання посібника, – навчити студентів-економістів умінню формулювати економічні задачі математичною мовою, будувати математичні моделі та знаходити їхні розв'язки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Барковський В. В, Барковська Н. В. Математика для економістів. Вища математика. Київ, 1997.
2. Гудименко Ф. С., Борисенко Д. М., Волкова В. О. та ін. Збірник задач з вищої математики. Київ, 1967.
3. Тевяшов А. Д., Литвин О. Г. Вища математика. Загальний курс. Збірник задач і вправ. Харків : Рубікон, 1999.
4. Тріщ Б. М. Основи вищої математики. Теореми, приклади і задачі : навч. посібник. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2008.
5. Тріщ Б. М. Вища математика для економістів: підручник. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2011.
6. Тріщ Б. М. Практикум з вищої математики. Модуль 1. Лінійна алгебра : навч. посібник. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2010. 133 с.
7. Тріщ Б. М. Практикум з вищої математики. Модуль 2. Аналітична геометрія : навч. посібник. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2010. 126 с.
8. Тріщ Б. М. Практикум з вищої математики. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: навч. посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2012. 206 с.
9. Тріщ Б. М. Практикум з вищої математики. Модуль 4: Диференціальне числення функцій однієї змінної : навч. посібник. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. 2012, 133 с.
10. Тріщ Б. М. Практикум з вищої математики. Модуль 5. Інтегральне числення функцій однієї змінної : навч. посібник. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. 2012, 109 с.
11. Тріщ Б. М. Практикум з вищої математики. Модуль 6. Функції багатьох змінних : навч. посібник. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. 2012, 109 с.
12. Тріщ Б. М. Практикум з вищої математики. Модуль 7. Числові та функціональні ряди : навч. посібник. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. 2012, 71 с.
13. Тріщ Б. М. Практикум з вищої математики. Модуль 8. Диференціальні рівняння : навч. посібник. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка. 2012, 111 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- алгебричне доповнення 12
- аргумент комплексного числа 116
- асимптоти гіперболи 78
- асимптота графіка
 - вертикальна 130
 - горизонтальна 131
 - похила 131
- базис 39,50
- вектор
 - одиничний 37
- вектори
 - колінеарні 37
 - компланарні 39
 - лінійно залежні 39
 - лінійно незалежні 39
 - протилежні 37
- векторний добуток 44
- векторний простір 50
- визначник 11
 - Вронського 438
- висловлення 104
 - еквівалентні 104
- висловлювальні форми 104
- відсотки 161
- власне значення матриці 58
- власний вектор 58
- гіпербола 77
- гіперболічний параболоїд 96
- границя числової послідовності 153
- границя функції
 - за Гейне 173
 - за Коші 174
 - лівостороння 176
 - правостороння 176
- графік функції
 - випуклий угору 130, 241
 - випуклий униз 130, 241
- декартові координати вектора 41
- диз'юнкція 104
- директриса
 - гіперболи 78
 - еліпса 76
 - параболи 79
- диференціал функції 206, 330
- диференціальне рівняння 409
 - Бернуллі 421
 - в повних диференціалах 422
 - в симетричному вигляді 409
 - з відокремлюваними змінними 411
 - лінійне першого порядку 415
 - лінійне другого порядку 441
 - лінійне n -го порядку 437
 - однорідне 412
 - Рікатті 421
 - Самуельсона 419
- дійсна частина комплексного числа 116
- достатня умова 105
- евклідів простір 54
- екстремум функції 236
 - глобальний 350
 - локальний 236, 343
 - умовний 355
- ексцентриситет
 - гіперболи 78
 - еліпса 76
- еластичність функції 254, 335
- еліпс 75
- еліпсоїд 96
- задача Коші 409, 432
- заперечення 104
- імплікація 104
- інтеграл
 - визначений 276
 - невизначений 262
 - невластивий 295
 - другого типу 298
 - збіжний 299
 - збіжний абсолютно 302
 - розбіжний 299
 - першого типу 295
 - збіжний 295
 - збіжний абсолютно 298
 - розбіжний 295
 - повторний 368
 - подвійний 365
- інтегральна крива 409
- інтегральна сума 276
- інтервал
 - збіжності степеневого ряду 389
- квадратична форма 63
- квантори 104
- коефіцієнти Фур'є 400
- комплексна площа 116
- комплексне число 115
- кон'юнкція 104
- координати вектора 40,41
- координати точки 41
- критерій Сильвестра 66
- лінійна комбінація
 - векторів 39, 50

матриця 4
 діагональна 5
 квадратна 5
 вироджена 13
 невироджена 13
 нульова 5
 обернена 15
 одинична 5
 симетрична 5
 транспонована 4
 мінор 12
 мішаний добуток векторів 46
 множина
 відкрита 307
 дійсних чисел 110
 замкнена 307
 зв'язна 307
 іраціональних чисел 111
 комплексних чисел 115
 натуральних чисел 111
 обмежена
 згори 114
 знизу 114
 раціональних чисел 110
 множник Лагранжа 357
 модель
 зростання випуску за умов конкуренції 450
 інфляційних очікувань 451
 обмеженого зростання 449
 природного зростання 448
 Кейнса 452
 Солоу 453
 модуль
 вектора 37
 дійсного числа 113
 комплексного числа 115
 необхідна умова 105
 об'єднання множин 108
 область визначення функції 121
 ознака
 Даламбера 382, 385
 інтегральна 384
 Коші 383, 385
 Лейбніца 386
 порівняння 381
 окіл точки 173, 307
 парабола 79
 первісна 262
 переріз множин 108
 підмножина 107
 площа 86
 поверхня 96
 повний диференціал функції 330
 послідовність 150
 збіжна 153
 зростаюча 152
 монотонна 152
 незростаюча 152
 необмежена 152
 нескінченно велика 154
 нескінченно мала 154
 неспадна 151
 обмежена 151
 розбіжна 153
 спадна 152
 числова 150
 похідна функції 199
 за напрямом 332
 лівостороння 199
 одностороння 199
 правостороння 199
 правила де Моргана 109
 правила Лопіталя 229, 230
 проекція вектора на вісь 40
 пряма
 на площині 69
 у просторі 88
 прямокутна декартова система координат 41
 радіус збіжності степеневого ряду 389
 ранг матриці 16
 ряд
 знакопереміжний 386
 Маклорена 393
 Фур'є 398
 степеневий 388
 числовий 377
 збіжний 377
 абсолютно 385
 умовно 385
 розбіжний 377
 система
 лінійних рівнянь 21
 визначена 21
 невизначена 21
 несумісна 21
 сумісна 21
 скалярний добуток 42
 спряжене комплексне число 117
 теорема
 Больцано-Коші друга 192
 Больцано-Коші перша 191
 Вейерштрасса друга 192
 Вейерштрасса перша 192
 Коші 223
 Кронеккера-Капеллі 26
 Лагранжа 222
 Ролля 220
 Ферма 220

точка
внутрішня 307
критична 237
локального екстремуму 236
локального максимуму 236
локального мінімуму 236
перегину графіка функції 241
розриву функції 188
стаціонарна 237
тригонометрична форма комплексного числа 117
умова необхідна 105
умова достатня 105
уявна одиниця 116
уявна частина комплексного числа 116
фокус
гіперболи 78
еліпса 76
параболи 79

формула
Крамера 24
Маклорена 226
Ньютона-Лейбніца 281
Тейлора 225, 342
функція
виробнича 137, 310
витрат 142, 310
Діріхле 123
Кобба-Дугласа 311
корисності 311
монотонна 126
необмежена 125
непарна 126
неперервна 186
обернена 128
обмежена 125
парна 126
періодична 127
попиту 138, 310
пропозиції 139, 310
сталі еластичності 311
Торнквіста 144

ЗМІСТ

Передмова	3
Розділ 1. Основи лінійної та векторної алгебри	4
1.1. Матриці і визначники.....	4
1.1.1. Матриці та дії над ними.....	4
1.1.2. Визначники, їхні властивості й головні способи обчислення.....	11
1.1.3. Обернена матриця.....	15
1.1.4. Ранг матриці.....	16
Задачі для самостійного розв'язування.....	18
1.2. Системи лінійних рівнянь.....	21
1.2.1. Системи n лінійних рівнянь з n невідомими.....	22
1.2.2. Системи m лінійних рівнянь з n невідомими.....	26
1.2.3. Система лінійних однорідних рівнянь.....	32
Задачі для самостійного розв'язування.....	35
1.3. Елементи векторної алгебри.....	37
Задачі для самостійного розв'язування.....	47
1.4. Векторні простори.....	49
Задачі для самостійного розв'язування.....	56
1.5. Власні значення та власні вектори матриці.....	58
Задачі для самостійного розв'язування.....	63
1.6. Квадратичні форми.....	63
Задачі для самостійного розв'язування.....	67
Розділ 2. Аналітична геометрія	68
2.1. Лінії на площині.....	68
2.1.1. Рівняння лінії на площині.....	68
2.1.2. Пряма на площині.....	69
2.1.3. Криві другого порядку.....	75
Задачі для самостійного розв'язування.....	82
2.2. Лінії та поверхні у просторі.....	85
2.2.1. Поняття поверхні та лінії.....	85
2.2.2. Площина і пряма у просторі.....	86
2.2.3. Алгебричні поверхні другого порядку.....	96
Задачі для самостійного розв'язування.....	100
Розділ 3. Вступ до математичного аналізу	104
3.1. Елементи математичної логіки.....	104
Задачі для самостійного розв'язування.....	107
3.2. Множини та дії над ними.....	107
3.2.1. Поняття множини. Алгебра множин.....	107
3.2.2. Множина дійсних чисел.....	110
3.2.3. Множина комплексних чисел.....	115

Задачі для самостійного розв'язування.....	119
3.3. Функції однієї змінної та їхні властивості.....	121
3.1.1. Поняття функції однієї змінної. Властивості функцій.....	121
3.3.2. Деякі класи функцій.....	125
3.3.3. Функції, які використовують в економіці.....	137
Задачі для самостійного розв'язування.....	147
3.4. Числові послідовності та їхні границі.....	150
3.4.1. Поняття числової послідовності та її властивості.....	150
3.4.2. Границя числової послідовності.....	153
3.4.3. Математичні основи фінансового аналізу.....	161
Задачі для самостійного розв'язування.....	169
3.5. Границя функції. Неперервність.....	173
3.5.1. Границя функції неперервного аргументу.....	173
3.5.2. Неперервність функції в точці.....	186
3.5.3. Головні властивості неперервних функцій.....	191
Задачі для самостійного розв'язування.....	194
Розділ 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної.....	198
4.1. Похідні та диференціали першого порядку.....	198
4.1.1. Означення похідної.....	198
4.1.2. Похідні деяких елементарних функцій.....	202
4.1.3. Правила обчислення похідних.....	203
4.1.4. Диференційованість функції. Диференціал.....	205
Задачі для самостійного розв'язування.....	211
4.2. Похідні та диференціали вищих порядків.....	215
4.2.1. Похідні вищих порядків.....	215
4.2.2. Диференціали вищих порядків.....	217
Задачі для самостійного розв'язування.....	219
4.3. Головні теореми диференціального числення.....	220
4.3.1. Теореми про середнє значення.....	220
4.3.2. Формула Тейлора.....	224
Задачі для самостійного розв'язування.....	234
4.4. Застосування диференціального числення до дослідження функцій.....	235
Задачі для самостійного розв'язування.....	248
4.5. Застосування диференціального числення функцій однієї змінної до задач економіки.....	250
4.5.1. Елементи граничного аналізу в економіці.....	250
4.5.2. Еластичність та її застосування в економічному аналізі.....	254
Задачі для самостійного розв'язування.....	259
Розділ 5. Інтегральне числення функцій однієї змінної.....	262
5.1. Невизначений інтеграл.....	262
5.1.1. Первісна та невизначений інтеграл.....	262

5.1.2. Головні властивості невизначеного інтеграла.....	263
5.1.3. Табличні інтеграли.....	263
5.1.4. Головні методи інтегрування.....	264
5.1.5. Інтегрування раціональних функцій.....	267
5.1.6. Інтегрування ірраціональних функцій.....	271
5.1.7. Інтегрування тригонометричних функцій.....	273
Задачі для самостійного розв'язування.....	274
5.2. Визначений інтеграл.....	276
5.2.1. Означення й умови існування визначеного інтеграла.....	276
5.2.2. Головні властивості інтегрованих функцій.....	278
5.2.3. Головна формула інтегрального числення.....	280
5.2.4. Головні правила інтегрування.....	281
5.2.5. Геометричні застосування визначеного інтеграла.....	283
5.2.6. Застосування визначених інтегралів до задач економіки.....	287
Задачі для самостійного розв'язування.....	292
5.3. Невластиві інтеграли.....	295
5.3.1. Невластиві інтеграли з нескінченними межами інтегрування.....	295
5.3.2. Невластиві інтеграли від необмежених функцій.....	298
Задачі для самостійного розв'язування.....	303
Розділ 6. Функції багатьох змінних.....	305
6.1. Функції багатьох змінних та їхні границі. Неперервність.....	305
6.1.1. Поняття евклідового простору та функції багатьох змінних.....	305
6.1.2. Границя функції багатьох змінних.....	312
6.1.3. Неперервність функції багатьох змінних.....	318
Задачі для самостійного розв'язування.....	322
6.2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних.....	324
6.2.1. Похідні та диференціали першого порядку.....	324
6.2.2. Похідні та диференціали вищих порядків.....	337
6.2.3. Локальний екстремум функцій багатьох змінних.....	343
6.2.4. Метод найменших квадратів.....	351
6.2.5. Умовний екстремум функцій багатьох змінних.....	355
Задачі для самостійного розв'язування.....	359
6.3. Інтегрування функцій багатьох змінних.....	365
6.3.1. Поняття подвійного інтеграла та його властивості.....	365
6.3.2. Обчислення подвійних інтегралів.....	368
6.3.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі.....	371
6.3.4. Деякі геометричні застосування подвійних інтегралів.....	373
Задачі для самостійного розв'язування.....	375
Розділ 7. Числові та функціональні ряди.....	377
7.1. Числові ряди.....	377
7.1.1. Поняття числового ряду. Головні властивості.....	377

7.1.2. Числові ряди з невід’ємними елементами.....	381
7.1.3. Збіжність довільних числових рядів.....	384
Задачі для самостійного розв’язування.....	386
7.2. Функціональні ряди.....	387
7.2.1. Поняття функціонального ряду. Головні властивості.....	387
7.2.2. Степеневі ряди.....	388
7.2.3. Ряди Фур’є.....	398
Задачі для самостійного розв’язування.....	406
Розділ 8. Диференціальні рівняння.....	409
8.1. Диференціальні рівняння першого порядку.....	409
8.1.1. Найпростіші властивості диференціальних рівнянь першого порядку.....	409
8.1.2. Інтегрування деяких типів диференціальних рівнянь першого порядку, розв’язаних щодо похідної.....	411
8.1.3. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв’язані щодо похідної.....	425
Задачі для самостійного розв’язування.....	429
8.2. Диференціальні рівняння вищих порядків.....	432
8.2.1. Найпростіші властивості диференціальних рівнянь вищих порядків.....	432
8.2.2. Випадки інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків, не розв’язаних щодо старшої похідної.....	434
Задачі для самостійного розв’язування.....	436
8.3. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку.....	437
8.3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння.....	437
8.3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.....	439
8.3.3. Диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами.....	441
Задачі для самостійного розв’язування.....	447
8.4. Застосування диференціальних рівнянь до моделей економіки.....	448
Задачі для самостійного розв’язування.....	455
Розділ 9. Основи практичного застосування пакета Maple.....	457
9.1. Головні поняття.....	457
9.2. Застосування команд Maple до розв’язування задач.....	460
Відповіді.....	467
Список літератури.....	487
Предметний покажчик.....	488

Навчальне видання

Тріщ Богдан Михайлович

**ВИЩА МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ**

Твердження, приклади і задачі

Редактор *Плиса Н. Й.*

Комп'ютерне верстання *Куліненко І. Б.*

Обкладинка *Рогана В. О.*

Формат 60×84¹/8. Умовн. друк. арк. 57,66 Тираж прим. Зам.

Видавець та виготовлювач:

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000

СВІДОЦТВО

про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції:

Серія ДК №3059 від 13.12.2007 р.

Тріщ Б. М.
Т 69 Вища математика для економістів. Твердження, приклади і задачі / Б. М. Тріщ. –
Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2023. – 496 с.

ISBN 978-617-10-0797-0

Наведено головні теореми й означення лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу. Описано розв'язування типових задач і задачі для самостійного розв'язування. Особливу увагу приділено задачам економічного змісту, моделям, для опису яких використовують методи вищої математики. Матеріал, викладений у посібнику, відповідає програмі курсу вищої математики для економічних спеціальностей вищих закладів освіти.

Для студентів економічних спеціальностей.

УДК 51(076)