Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Ю. М. ЩЕРБИНА

Н. М. КОЛОС

О. Я. ПРЯДКО

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА
для комп'ютерних наук

Навчальний посібник

Львів
ЛНУ ім. Івана Франка
2023

УДК 510.6(075)
Щ 64

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф., член кореспондент НАН України *Н. Я. Панкратова*
(Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського);
д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. С. Нікітченко*
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка);
д-р техн. наук, проф. *Г. М. Жолткевич*
(Харківський національний університету імені В.Н. Каразіна)

Рекомендовано до друку Вченою радою
Львівського національного університету імені Івана Франка.
Протокол № 37/10 від 26 жовтня 2022 року.

Щербина Ю. М.
Щ 64 Математична логіка для комп'ютерних наук : навч. посібник / Ю. М. Щербина, Н. М. Колос, О. Я. Прядко. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2023. – 250 с.

ISBN 978-617-10-0760-4.

Викладено основи математичної логіки. Розглянуто класичну та некласичні логіки. Значну увагу приділено питанням застосувань математичної логіки для комп'ютерних наук. Викладення проілюстровано прикладами, у кінці розділів запропоновано питання для самоконтролю та вправи для самостійної роботи.

Для студентів спеціальностей «Інформатика», «Прикладна математика», «Системний аналіз».

УДК 510.6(075)

Відтворення цієї книги або будь-якої її частини
заборонено без письмової згоди видавництва.
Будь-які спроби порушення авторських прав
будуть переслідуватися у судовому порядку

© Щербина Ю. М., Колос Н. М., Прядко О. Я., 2023
© Львівський національний університет
імені Івана Франка, 2023

ISBN 978-617-10-0760-4

ЗМІСТ

Вступ…….. 7

Розділ 1. Пропозиційна логіка…….. 10
1.1. Основні означення пропозиційної логіки……. 10
1.2. Пріоритет логічних операцій……. 13
1.3. Структура формули……. 14
1.4. Формальна граматика для формул пропозиційної логіки…… 15
1.5. Інтерпретація формул пропозиційної логіки. Еквівалентність формул…. 15
1.6. Загальнозначущість і суперечність у пропозиційній логіці……. 17
1.7. Приклади застосування пропозиційної логіки…….. 18
1.7.1. Переклад речень з природної мови……. 18
1.7.2. Технічні характеристики системи…….. 19
1.8. Семантичні таблиці……. 21
1.9. Закони пропозиційної логіки…….. 23
1.10. Алгебра Буля…… 25
1.11. Джордж Буль…… 26
1.12. Ауґустус де Морган……. 27
1.13. Кон'юнктивні та диз'юнктивні нормальні форми…… 27
1.14. Досконала кон'юнктивна та досконала диз'юнктивна нормальні форми…… 29
1.15. Логічне виведення у пропозиційній логіці…… 34
1.16. Правила виведення у пропозиційній логіці……... 37
1.17. Застосування правил виведення для побудови міркувань……... 40
1.18. Резолюція…….. 42
1.19. Питання для самоконтролю…… 43
1.20. Задачі для самостійного розв'язування……. 44

Розділ 2. Логіка першого порядку (логіка предикатів)…… 61
2.1. Поняття предиката……... 61
2.2. Квантори загальності й існування. Формули логіки першого порядку….. 65
2.3. Формальна граматика для формул логіки першого порядку……... 67
2.4. Переклад з природної мови на математичну, і навпаки……... 67
2.5. Використання предикатів і кванторів для опису технічних характеристик системи……. 71
2.6. Інтерпретація формул у логіці першого порядку. Еквівалентність формул. Виконуваність, загальнозначущість та суперечність…….. 71
2.7. Семантичні таблиці з кванторами в логіці першого порядку……... 75
2.8. Закони логіки першого порядку……... 78
2.9. Логічний наслідок…….. 82
2.10. Готлоб Фреге…….. 85
2.11. Правила виведення в логіці першого порядку…… 85
2.12. Приклади розв'язування задач……. 86
2.13. Випереджена нормальна форма…… 89
2.14. Сколемівська нормальна форма…… 91

2.15. Питання для самоконтролю…… 94
2.16. Задачі для самостійного розв'язування…… 95

Розділ 3. Теорема Ербрана……. 107
3.1. Алгоритмічна нерозв'язність задачі виявлення загальнозначущості формул у логіці першого порядку…… 107
3.2. Стандартне подання формул…… 108
3.3. Ербранівський універсум і ербранівський базис……109
3.4. Основний приклад диз'юнкта …… 111
3.5. *H*-інтерпретація…… 112
3.6. Важливі твердження щодо *H*-інтерпретації……115
3.7. Семантичні дерева……117
3.8. Теорема Ербрана……120
3.9. Застосування теореми Ербрана…… 122
3.10. Жак Ербран……123
3.11. Питання для самоконтролю……..123
3.12. Задачі для самостійного розв'язування……123

Розділ 4. Метод резолюцій. Автоматичне доведення теорем……125
4.1. Метод резолюцій у пропозиційній логіці……125
4.2. Основна теорема резолюції для пропозиційної логіки……..127
4.3. Пропозиційна логіка: розв'язувач SAT. Алгоритм Девіса-Патнема…… 129
4.3.1.Властивості кон'юнктивної нормальної форми…… 129
4.3.2.Алгоритм Девіса-Патнема…….. 132
4.3.3.Алгоритм DPLL……..……. 134
4.4. Підстановка та уніфікація……136
4.5. Алгоритм уніфікації…….. 140
4.6. Метод резолюцій у логіці першого порядку…….. 142
4.7. Приклади застосування методу резолюцій у логіці першого порядку…….144
4.8. Теорема про повноту методу резолюцій для логіки першого порядку……147
4.9. Застосування методу резолюцій для доведення теорем, пошуку відповідей і планування дій……151
4.9.1. Доведення теорем……... 151
4.9.2. Пошук відповідей на питання…….. 152
4.9.3. Планування дій…….. 154
4.10. Стратегії методу резолюцій……. 155
4.10.1. Стратегія насичення рівнів……... 156
4.10.2. Стратегія переваги (коротших диз'юнктів)…… 157
4.10.3. Стратегія викреслювання……. 157
4.11. Джон Алан Робінсон……. 158
4.12. . Питання для самоконтролю……159
4.13. Задачі для самостійного розв'язування……159

Розділ 5. Формальні теорії (числення)……...161
5.1. Загальний опис формальної теорії……161
5.1.1. Означення формальної теорії, або числення……162
5.1.2. Означення доведення……162

5.1.3. Повнота теорії. Несуперечливість теорії…… 163
5.1.4. Розв'язність теорії……... 164
5.2. Числення висловлень……164
5.3. Приклади доведення в численні висловлень. Теорема дедукції…… 166
5.4. Повнота, несуперечливість і розв'язність числення висловлень……... 171
5.5. Числення предикатів. Мова і правила виведення числення предикатів… 174
5.6. Приклади доведення в численні предикатів……. 176
5.7. Повнота і несуперечливість числення предикатів…… 177
5.8. Нерозв'язність числення предикатів…….. 177
5.9. Формальна арифметика……... 178
5.9.1. Аксіоми формальної арифметики……..……. 179
5.9.2. Несуперечливість формальної арифметики. Теорема Ґенцена…… 180
5.10. Теореми Ґеделя про неповноту…… 180
5.11. Курт Ґедель…… 181
5.12. Питання для самоконтролю……. 181
5.13. Задачі для самостійного розв'язування…….. 182

Розділ 6. Некласичні логіки…… 183
6.1. Інтуїціоністська логіка……. 183
6.2. Формально-аксіоматична система інтуїціоністської пропозиційної логіки…… 184
6.3. Реляційна семантика інтуїціоністської пропозиційної логіки (моделі Кріпке)…… 185
6.4. Семантичні таблиці для інтуїціоністської пропозиційної логіки…… 187
6.5. Нечіткі підмножини і нечітка логіка…….. 190
6.5.1. Нечіткі підмножини……. 190
6.5.2. Операції над нечіткими підмножинами……. 193
6.5.3. Нечітка логіка…… 195
6.5.4. Трикутні норми……. 195
6.5.5. Нечіткі відношення та їхні властивості…….. 197
6.6. Нечітке виведення……..204
6.6.1. Основні правила виведення в класичній логіці……. 204
6.6.2. Основні правила виведення в нечіткій логіці…… 205
6.7. Правила нечіткої імплікації…… 209
6.8. Модальні логіки…… 213
6.8.1. Типи модальності……. 214
6.8.2. Числення *I* й *T*……... 215
6.8.3. Числення *S*4, *S*5 і числення Брауера…… 215
6.9. Семантика Кріпке……. 216
6.10. Семантичні таблиці для алетичної пропозиційної логіки……218
6.11. С.А. Кріпке……221
6.12. Інші інтерпретації модальних знаків……221
6.13. Часові логіки…….. 222
6.13.1. Часова логіка Прайора…….. 222
6.13.2. Часова логіка Леммона……. 223
6.13.3. Часова логіка фон Врігта…….. 223

6.14. Ґеорг фон Врігт……. 224
6.15. Застосування часових логік до програмування. Часова логіка Пнуелі…... 224
6.16. Алгоритмічні логіки. Алгоритмічна логіка Гоара……. 232
6.17. Верифікація програм…… 234
6.18. Синтез програм……. 237
6.19. Чарльз Гоар…… 241
6.20. Питання для самоконтролю……. 241
6.21. Задачі для самостійного розв'язування…….. 243

Література…….. 245

Алфавітний покажчик……. 247

ВСТУП

Що ж таке логіка?

Філософська логіка – це наука про закони й форми відображення в мисленні розвитку об'єктивного світу, про закономірності пізнання істини. Головною задачею філософської логіки є формулювання законів і принципів, дотримання яких потрібне для отримання істинних умовиводів.

Формальна логіка – це наука, яка вивчає форми мислення (поняття, міркування, умовиводи, доведення) з боку їхньої логічної структури, тобто відволікаючись від конкретного змісту думок і відокремлюючи лише загальний спосіб зв'язку частин цього змісту. Підвалини формальної логіки заклав Аристотель.

Математична логіка – це галузь знання, в якій формальна логіка вивчається математичними методами. Головними задачами математичної логіки є: 1) побудова формально-логічних (аксіоматичних) числень; 2) вивчення зв'язку логічних числень з тими змістовними галузями знань, які слугують їх інтерпретаціями і моделями.

Уже в давнину робили спроби строго подавати математичні факти, які намагалися вивести з небагатьох вихідних тверджень – аксіом. Яскравим прикладом цього є геометрія Евкліда. Вивчали й закони правильного виведення наслідків із вихідних посилань (логіка Аристотеля).

Перші спроби створити строгі математичні теорії стосуються праць Буля, Фреге, Пеано, інших математиків. Дослідники мали на меті закласти такі основи математики, виокремити такі аксіоми й правила виведення, за допомогою яких можна було б формально довести будь-яке змістовно істинне математичне твердження. Подібні твердження можна було б доводити автоматично. Ця *програма* Гільберта не вдалася у повній мірі: австрійський математик Курт Ґедель (Kurt Friedrich Gödel) довів, що всяка достатньо багата формальна система (наприклад, формальна арифметика) не повна. Це означає, що в такій системі знайдуться змістовно істинні твердження, які є недоказовими в цій системі.

Найважливіше застосування логіки в комп'ютерних науках полягає у розв'язуванні таких завдань, які були б названі інтелектуальними, якби їх виконували люди. Прикладами таких завдань є *програмування, створення систем, які відповідають на питання, і доведення теорем.*

Друга половина 60-х років минулого століття в царині штучного інтелекту вирізнялась особливим посиленням уваги до машинного доведення теорем. Основи машинного доведення теорем були закладені Ербраном (J. Herbrand) ще

у 1930 році. Його метод був нереалізовуваний практично до винаходу електронних обчислювальних машин (сучасна назва – комп'ютери). Тільки після основної статті Дж. А. Робінсона (J.A. Robinson) [28], опублікованій 1965 року, в якій запропоновано *метод резолюцій*, був зроблений важливий поступ до створення програм, які реалізують доведення теорем. Після 1965 року було запропоновано багато удосконалень методу резолюцій.

Разом з прогресом у техніці машинного доведення теорем відбувався й прогрес у застосуванні цієї техніки в різних задачах штучного інтелекту. Першим таким застосуванням було створення дедуктивних систем, які відповідають на питання; після цього з'явилися застосування до задач синтезу та аналізу програм.

Логіка особливо важлива для підготовки спеціалістів з комп'ютерних наук, бо це математична основа програмного забезпечення: її використовують для формалізації семантики мов програмування та специфікації програм, а також перевірки коректності програм.

У пропонованій книзі розглянуто застосування математичної логіки до розв'язування інтелектуально складних проблем. Мається на увазі, що апарат математичної логіки використано для подання задач і пошуку їх розв'язків. Крім того, розглянуто елементи некласичної логіки та з'ясовано, як некласична логіка може бути застосована у комп'ютерних науках, зокрема, для задач синтезу і аналізу програм, застосування нечіткого виведення тощо.

Нижче наведено два простих приклади, щоб показати, як математичну логіку можна використати для подання задач.

Приклад В1. Припустімо, що є такі твердження.

A_1: Якщо спекотно й волого, то буде дощ.

A_2: Якщо волого, то спекотно.

A_3: Зараз волого.

Питання B: Чи буде дощ?

Наведені твердження записано українською мовою. Для їхнього подання мовою логічних формул ми використаємо символи p, q та r:

p : спекотно;

q : волого:

r : буде дощ.

Нам ще потрібно кілька логічних зв'язок. У цьому випадку ми використаємо $\wedge$ для подання «і», та $\rightarrow$ для «якщо…, то». Тоді три наведені раніше твердження подаватимуться так:

A_1: $(p \wedge q) \rightarrow r$;

A_2: $q \rightarrow p$;

A_3: q.

Отже, ми переклали українські твердження мовою логічних формул.

Пізніше ми переконаємося, що коли формули A_1, A_2 і A_3 істинні, то й формула B, яка подає твердження, r – істинна. Тому ми говоримо, що *B логічно випливає* з A_1, A_2 і A_3, тобто дощ буде.

Приклад В2. Маємо такі твердження.

A_1: Конфуцій – людина.

A_2: Кожна людина смертна.

Щоб подати A_1 і A_2, потрібне нове поняття – предикат. Ми вважатимемо, що $P(x)$ і $Q(x)$ подають «x є людиною» та «x смертний», відповідно. Також використаємо $\forall x$, щоб подати «для всіх x». Тоді щойно наведені твердження можна подати у вигляді таких формул:

A_1: $P(\text{Конфуцій})$,

A_2: $\forall x\left(P(x) \to Q(x)\right)$.

Згодом побачимо, що з формул A_1 і A_2 можна логічно вивести формулу B, яка подає твердження $Q(\text{Конфуцій})$, яке свідчить, що Конфуцій смертний.

У цих прикладах ми, за суттю, маємо довести, що якась формула логічно випливає з інших формул. *Твердження, що формула логічно випливає з інших формул, називають* ***теоремою****. Міркування, які доводять, що теорема правильна, тобто що формула логічно випливає з інших формул, називають* ***доведенням*** *цієї теореми.* Проблема машинного доведення теорем полягає у вивченні машинних методів для знаходження доведень теорем.

Є багато задач, які зручно перетворити в задачі доведення теорем.

1. У ***системах, які відповідають на питання***, факти (твердження) можна подати логічними формулами. Тоді, щоб відповісти на питання, використовуючи ці факти, доводять, що формула, яка подає відповідь, виводиться з формул, які подають ці факти.

2. У ***задачі аналізу програм*** можна описати виконання програми формулою A, а умову, що програма завершить роботу, іншою формулою B. Тоді перевірка того, що програма закінчить роботу, еквівалентна доведенню того, що формула B випливає з формули A.

3. У ***проблемі перетворення станів*** є множина станів і множина операторів над станами. Коли один з операторів застосовують до стану, одержують новий стан. Почавши з початкового стану, намагаються знайти послідовність операторів, які переводять початковий стан у якийсь бажаний. У цьому випадку можна описати стани й правила переходу логічними формулами. Отже, переведення початкового стану в бажаний можна розглядати як перевірку того, що формула, яка подає бажаний стан, виводиться з формули, яка подає стани, та правила переходу.

Оскільки багато задач можна сформулювати як задачі доведення теорем, то проблема автоматизації доведень виявляється важливою в штучному інтелекті.

Навчальне видання

ЩЕРБИНА Юрій Миколайович

КОЛОС Надія Мирославівна

ПРЯДКО Ольга Ярославівна

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА для комп'ютерних наук

Навчальний посібник

Редактор *Н. Плиса*
Комп'ютерне верстання *Н. Лобач*
Обкладинка *В. Роган*

Формат 70х100/16. Папір друк.
Умовн. друк. арк. 20,3.
Тираж 100 прим. Зам.

Видавець та виготовлювач:
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

СВІДОЦТВО
про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.